

Ausgewählte Kapitel
der
Zahlentheorie I.

Vorlesung,

gehalten im Wintersemester 1895/96

von

Felix

F. Klein.

Ausgearbeitet von A. Sommerfeld.

GÖTTINGEN 1896.



Inhaltsverzeichniss.

Anhang: Vorläufiges über elliptische Functionen und deren Zusammenhang mit der Theorie der definiten quadratischen Formen.



Absicht dieser Vorlesung ist es, die Theorie der binären quadratischen Formen in geometrischem Gewande zu entwickeln. Dabei wünschen wir nicht, für unsere geometrische Auffassung der Theorie den prinzipiellen Vorrang gegenüber einer rein arithmetischen Behandlung in Anspruch zu nehmen. Unsere Meinung ist es vielmehr, daß anschauliches Erfassen und logische Behandlungsweise der Mathematik sich nicht ausschliessen, sondern gegenseitig unterstützen sollen. In diesem Sinne werden wir in dem parallel laufenden Seminar dieselbe Theorie unter wesentlicher Mitwirkung von Hilbert mehr von ihrer

arithmetischen Seite her studiren.

Indem wir uns sogleich in medias res versetzen, schreiben wir den allgemeinen Ausdruck einer binären quadratischen Form folgendermassen an: $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

Für die Zwecke der Zahlentheorie sind die Veränderlichen x und y (ebenso wie die Coefficienten a, b, c) ganze Zahlen. Wir werden also bei geometrischer Auffassung dazu geführt, in der x, y - Ebene die ganzzahligen Punkte zu markiren. Wir legen irgend ein System von Parallelcoordinaten zu Grunde; dasselbe braucht nicht gerade rechtwinklig zu sein, auch kann der Maassstab, mit dem wir auf der x - und y - Axe messen verschieden sein. Durch die Punkte $x = 1, 2, 3$ .. der x Axe, bez. die Punkte $y = 1, 2, 3$ .. der y - Axe ziehen wir Parallelen zu den Coordinatenaxen und erhalten die Figur eines Parallelgitters. Die Eckpunkte desselben, die „Gitterpunkte", liefern uns die ganzzahligen Punkte der Ebene. Wenn wir unsere Aufmerksamkeit nur auf diese richten und von den verbindenden Graden absehen, sprechen wir von einem Punktgitter.

Eine erste Frage, die wir zu erledigen haben, ist diese: <u>Auf wie viel Arten ist es möglich, ein Punktgitter als Parallelgitter aufzufassen</u>?

Wir denken uns die beiden durch den Nullpunkt verlaufenden Geraden eines ev. neuen Parallelgitters als Axen eines neuen x'; y' - Systems und wählen als Maasseinheit auf den neuen Axen die Entfernung des auf der betr. Axe gelegenen nächsten Punktes vom Nullpuncte. Sollen beide Parallelgitter, das neue und das alte, zu demselben Punktgitter gehören, so müssen den sämtlichen ganzzahligen Punkten des x; y - Systemes ganzzahlige Punkte im x'; y' - System entsprechen und umgekehrt. Wir können daher unsere ursprüngliche Aufgabe analytisch folgendermassen aussprechen:

<u>Es sollen alle möglichen Transformationsformeln</u>:

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

von der Beschaffenheit aufgesucht werden, daß zu ganzzahligen Werten von x, y ganzzahlige Werte von x', y' gehören und umgekehrt.

Unter den Coordinatentransformationen der vorstehenden Form nimmt der Fall $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ eine Ausnahmestellung ein. Wir schliessen denselben hier aus. Im Übrigen unterscheiden wir die Transformation als gleichstimmig oder ungleichstimmig, je nachdem $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ oder $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$ ist. Im ersteren Falle ist der Sinn der Drehung, durch welche die positive x-Axe in die positive y-Axe, bez. die positive x'-Axe in die positive y'-Axe auf dem kürzesten Wege übergeführt wird, derselbe, im zweiten Falle der entgegengesetzte.

Aus der Bedingung, daß den ganzzahligen Punkten x', y' ganzzahlige Punkte x, y entsprechen sollen, folgt zunächst, indem wir $x' = 1, y' = 0$ bez. $x' = 0, y' = 1$ nehmen, daß die Substitutionscoefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen sein müssen. Sodann lösen wir nach x' und y' auf:

$$x' = \frac{\delta x - \beta y}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad y' = \frac{-\gamma x + \alpha y}{\alpha\delta - \beta\gamma};$$

aus der Bedingung, dass auch den ganzzahligen Werten x, y ganzzahlige Werte x', y' entsprechen sollen, folgt in derselben Weise, dass auch die folgenden Grössen

$$\frac{\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}, \frac{\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}, \dots,$$

bez. ganzen Zahlen (a, b, c, d) gleich sein müssen.

Wir haben also die Gl.:

$$\alpha = a(\alpha\delta-\beta\gamma),$$
$$\beta = b(\alpha\delta-\beta\gamma),$$
$$\gamma = c(\alpha\delta-\beta\gamma),$$
$$\delta = d(\alpha\delta-\beta\gamma),$$

aus denen sich durch geeignete Multiplication ergibt:

$$(\alpha\delta-\beta\gamma) = (ad-bc)(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$$

oder

$$1 = (ad-bc)(\alpha\delta-\beta\gamma).$$

Da die rechts stehenden Factoren ganze Zahlen sind, müssen sie beide entweder gleich $+1$ oder gleich -1 sein. Wir gewinnen also das Resultat: Die Determinante unserer Transformation $\alpha\delta-\beta\gamma$ muss gleich ± 1 sein. Umgekehrt sieht man, dass dann wirklich unsere Transformation die verlangten Eigen-

schaften besitzt.

Fr. d. 25. X. Die Determinante $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ hat eine einfache geometrische Bedeutung. Construiren wir uns das „Fundamentalparallelogramm" des transformirten Gitters, indem wir die Verbindungsstrecken des Nullpunktes mit den Punkten $x' = 1, y' = 0$ und $x' = 0, y' = 1$ zu einem Parallelogramm vervollständigen. Die letzteren haben im x, y-Systeme die Coordinaten $x = \alpha, y = \gamma$ bez. $x = \beta, y = \delta$. Der Inhalt des transformirten Fundamentalparallelogramms ist also gerade gleich der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ vorausgesetzt, dass wir den Inhalt des ursprünglichen Elementarparellelogramms $= 1$ setzen.

Mithin sagt die Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ aus, dass der Flächeninhalt des neuen Elementarparallelogramms gleich 1 d. h. ebenso gross, wie der des alten ist.

In dieser geometrischen Fassung ist der Satz, dass bei unserer Fragestellung $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ wird, eigentlich selbstverständlich, wie die folgende Betrachtung zeigt, die wir hier nur im allgemei-

nen Umriss skizziren. Die Anzahl der Elementarparallelogramme ist ebenso gross, wie die Anzahl der Gitterpuncte; denn wir können jedem Gitterpuncte ein anstossendes Parallelogramm zuordnen und umgekehrt. Die Anzahl der Gitterpuncte, also auch die der Elementarparallelogramme ist hiernach in beiden Gittern dieselbe. Wir teilen nun durch die beiden Gitter dieselbe Grösse (nämlich den Inhalt der ganzen Ebene) in dieselbe Anzahl unter sich gleicher Theile (einzelner Parallelogramme) ein. Mithin werden diese Teile bei beiden Einteilungen gleich gross ausfallen. – Diese Überlegung kann und muss natürlich präcisirt werden, wie solches im Seminar geschehen wird.

Die Frage nach den möglichen Parallelgittern führte uns auf die Untersuchung der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$. Ohne Weiteres zeigt sich dass α und γ, ebenso β und δ etc. relativ prim gewählt werden müssen. Ersteres heisst geometrisch, dass die erste Seite des

neuen Fundamentalparallelogramms im Innern keine Gitterpuncte enthalten darf. Dies vorausgesetzt, wollen wir zeigen, dass man zu beliebig gegebenem α und γ allemal Zahlen β und δ (u. s. w. unendlich viele Zahlen) finden kann, welche unserer Gleichung genügen, oder anders ausgedrückt, dass man zu einer beliebig im Gitter gezogenen ersten Strecke, welche in ihrem Innern keinen Gitterpunkt trägt, eine zweite so bestimmen kann, dass das entstehende Parallelogramm den Flächeninhalt 1 hat.

Zunächst zeigt sich, dass, wenn ein solches Zahlenpaar (β', δ') gefunden ist, sogleich unendlich viele (und damit alle überhaupt existirenden) angegeben werden können. Sei nämlich

$$\alpha\delta' - \beta'\gamma = 1.$$

Wir subtrahiren davon die Gl. $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ und finden als Bedingung für β und δ die Gl:

$$\alpha(\delta - \delta') = \gamma(\beta - \beta').$$

Da α und γ als relativ prim vorausge-

setzt werden, so muss, unter m eine ganze Zahl verstanden, jede Lösung unserer Gl. die Form haben:

$$\beta - \beta' = m\alpha\,, \quad \delta - \delta' = m\gamma$$

oder

$$\beta = \beta' + m\alpha\,, \quad \delta = \delta' + m\gamma.$$

Dieser Schluss beruht wesentlich auf den elementaren Teilbarkeitsgesetzen der ganzen Zahlen. Umgekehrt erkennt man, dass die vorstehenden Werte von β und δ bei beliebigem m unserer Gleichung genügen. Wir haben also die allgemeinste Lösung der vorliegenden „Diophantischen Gleichung ersten Grades" aus einer speziellen Lösung abgeleitet.

Um eine einzelne Lösung β', δ' zu finden, dazu dient uns der „Euklidische Algorithmus". Derselbe hat zunächst den Zweck, den grössten gemeinsamen Teiler zweier gegebener Zahlen a_1 und a_2 zu berechnen: Wir setzen an:

$$a_1 = \mu_1 a_2 + a_3$$

$$a_2 = \mu_2 \mu_3 + \mu_4$$

$$a_3 = \mu_3 a_4 + a_5$$

$$- - - - - - - -$$

Hier sind $a_3, a_4, \ldots, \mu_1, \mu_2 \ldots$ lauter positive ganze Zahlen, von denen wir die letzteren jedesmal so gross wie möglich wählen. Wir machen nun den specifisch zahlentheoretischen Schluss, dass in der Reihe der abnehmenden Zahlen $a_3, a_4, \ldots$ schliesslich die Null auftreten muss, dass also das Euklidische Verfahren abbricht. Die letzten Gleichungen mögen lauten:

$$a_{n-2} = \mu_{n-2} \; a_{n-1} + a_n,$$

$$a_{n-1} = \mu_{n-1} \; a_n.$$

Indem wir diese Gleichungen einmal von vorwärts nach rückwärts und einmal von rückwärts nach vorwärts lesen, erkennen wir, dass a_n der grösste gemeinsame Teiler von a_1 und a_2 ist. In dem besonderen Fall, wo a_1 und a_2 relativ prim sind, muss a_n gleich 1 sein.

Wir brauchen den Euklidischen Algorithmus nur etwas umzuordnen, um zu der gewöhnlichen Kettenbruchentwickelung des Quotienten a_1/a_2 zu gelangen: Es wird:

$$\frac{a_1}{a_2} = \mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cfrac{1}{\mu_3 + \cdots + \cfrac{1}{\mu_{n-1}.}}}$$

Um anzudeuten, daß die Kettenbruchentwicklung auch auf irrationale Zahlen ausgedehnt werden kann, schreiben wir ω an Stelle von a_1/a_2 und setzen die folgenden Gleichungen an:

$$\omega = \mu_1 + x_1$$
$$\frac{1}{x_1} = \omega_1 = \mu_2 + x_2$$
$$\frac{1}{x_2} = \omega_2 = \mu_3 + x_3$$

$$\omega = \mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cfrac{1}{\mu_3 + \cdots}}$$

Hier bedeuten die μ_1, μ_2 wieder ganze Zahlen, die $x_1, x_2 \ldots$ positive echte Brüche; die ersteren bezeichnet man als Teilnenner, die letzteren wollen wir Teilreste nennen. Brechen wir den Kettenbruch an einer beliebigen Stelle ab, so erhalten wir einen „Näherungswert" für die Zahl ω. Die Näherungswerte sind rationale Brüche von der Form $\frac{p}{q}$ Wir haben

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{\mu_1}{1}$$
$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{\mu_1\mu_2 + 1}{\mu_2}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{\mu_1\left(\mu_2 + \frac{1}{\mu_3}\right) + 1}{\mu_2 + \frac{1}{\mu_3}} = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1 + \mu_3}{\mu_2\mu_3 + 1} \quad \text{etc.}$$

Von den Näherungsbrüchen gehen wir zu Näherungspaaren über, in dem wir

die ersteren je in einen Zähler und Nenner spalten, die relativ prim zu einander sind. Die ersten Näherungspaare werden sein.

$p_1 = \alpha_1, \quad q_1 = 1$

$p_2 = \alpha_1\alpha_2 + 1, \quad q_2 = \alpha_2.$

Die Reihe der Näherungspaare setzen wir noch nach rückwärts in geeigneter Weise fort, indem wir definiren:

$p_0 = 1, \quad q_0 = 0$

$p_{-1} = 0, \quad q_{-1} = 1.$

Do. d. 31. X. Zwischen den aufeinander folgenden Näherungsbrüchen besteht nun die folgende einfache Recursionsformel:

$$1)\ \frac{p_r}{q_r} = \frac{\alpha_r p_{r-1} + p_{r-2}}{\alpha_r q_{r-1} + q_{r-2}}.$$

Wir beweisen dieselbe durch vollständige Induction, nehmen also an, daß dieselbe Formel für den $(r-1)^{ten}$ Näherungsbruch richtig sei, daß also:

$$\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}} = \frac{\alpha_{r-1}\, p_{r-2} + p_{r-3}}{\alpha_{r-1}\, q_{r-2} + q_{r-3}} \text{ sei.}$$

Nun entsteht doch der $(r-1)^{te}$ Näherungsbruch, wenn wir den Kettenbruch mit der Zahl α_{r-1}, der r^{te}, wenn wir

ihn mit der Zahl u_r abbrechen. Der $r$te Näherungsbruch, können wir auch sagen, entsteht aus dem $(r-1)^{ten}$, wenn wir u_{r-1} durch $u_{r-1} + \frac{1}{u_r}$ ersetzen.

Thun wir dieses in der Formel für $\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}}$, so ergiebt sich, da $p_{r-2}, q_{r-2}, p_{r-3}, q_{r-3}$ die Zahl u_{r-1} nicht mehr enthalten:

$$\frac{p_r}{q_r} = \frac{(u_{r-1} + \frac{1}{u_r})\, p_{r-2} + p_{r-3}}{(u_{r-1} + \frac{1}{u_r})\, q_{r-2} + q_{r-3}} = \frac{u_r p_{r-1} + p_{r-2}}{u_r q_{r-1} + q_{r-2}}.$$

Berücksichtigt man noch, daß die Formel 1) für $r=1$ richtig ist, so ist sie damit für jedes r bewiesen.

Wir zeigen ferner, daß die Recursionsformel nicht nur für die Näherungsbrüche, sondern auch für die Näherungspaare besteht, daß also:

$$2)\quad \begin{aligned} p_r &= u_r p_{r-1} + p_{r-2} \\ q_r &= u_r q_{r-1} + q_{r-2}. \end{aligned}$$

Letzteres wird dann zutreffen, wenn die rechten Seiten von 2) relativ prim sind. Wir bezeichnen dieselben vorläufig mit p_r', q_r' und haben dann:

$$(p_r' q_{r-1} - q_r' p_{r-1}) = -(p_{r-1} q_{r-2} - q_{r-1} p_{r-2})$$

Durch die wiederholte Ausführung der

selben Rechnung folgt

$(p'_r q_{r-1} - q'_r p_{r-1}) = (-1)^r (p_0 q_{-1} - q_0 p_{-1}) = (-1)^r.$

p'_r und q'_r können also keinen gemeinsamen Teiler haben; es ist daher wirklich $p_r = p'_r$, $q_r = q'_r$ und die Formel 2) ist bewiesen.

Die gleichzeitig bewiesene Relation:

3) $p_r q_{r-1} - q_r p_{r-1} = (-1)^r$

wird als Determinantensatz der Kettenbrüche bezeichnet.

Nach 2) ergiebt sich p_r aus p_{r-2} durch μ_r - malige Hinzufügung von p_{r-1} etc. Bei diesem Verfahren liegt es nahe, zwischen das $r-2^{te}$ und das r^{te} Näherungspaar noch die folgenden Zahlenpaare einzuschalten:

2') $\begin{matrix} \varrho p_{r-1} + p_{r-2} \\ \varrho q_{r-1} + q_{r-2} \end{matrix} \quad (\varrho = 1, 2, \ldots (\mu_r - 1)),$

welche man offenbar auch so schreiben kann:

2') $\begin{matrix} p_r - \sigma p_{r-1} \\ q_r - \sigma q_{r-1} \end{matrix} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots (\mu_r - 1)).$

Diese bezeichnen wir als Nebennäherungspaare, die früheren im Gegensatz dazu

auch als Hauptnäherungspaare.

Endlich drücken wir noch die zu entwikkelnde Grösze w selbst recurrent mit Benutzung der Teilreste r_r aus. Es war ja

$$w = u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cdots \cfrac{1}{u_r + r_r}}$$

w entsteht also aus $\frac{p_r}{q_r}$, wenn wir hier $u_r + r_r$ statt u_r eintragen; mithin haben wir

$$4) \quad w = \frac{p_r + r_r p_{r-1}}{q_r + r_r q_{r-1}} .$$

Wir benutzen diese Formel, um uns ein Urtheil über die Abweichung des r^{ten} Näherungsbruches von w_r zu verschaffen. Wir haben:

$$5) \quad w - \frac{p_r}{q_r} = \frac{r_r(-1)^{r-1}}{q_r(q_r + r_r q_{r-1})} .$$

Die Abweichung wird immer kleiner, je weiter wir in der Reihe der Näherungsbrüche vorwärts gehen; denn der Nenner wächst mit wachsendem r, während der Zähler ein echter Bruch ist. Vor Allem aber sehen wir: Die aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche sind abwechselnd grös=

ser und kleiner als ω; genauer gesagt, sind die Näherungsbrüche gerader Ordnung grösser, die ungerader Ordnung kleiner als ω.

Nach diesen Entwickelungen kommen wir auf unseren Ausgangspunkt, nämlich auf die Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

zurück; hier waren α und γ gegebene relativ prime Zahlen, β und δ sollte gefunden werden. Zu dem Zwecke entwickeln wir $\frac{\alpha}{\gamma}$ in einen Kettenbruch; derselbe bricht an einer gewissen Stelle (der n-ten) ab, so dass

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{p_n}{q_n}$$

Da Zähler und Nenner auf beiden Seiten dieser Gleichung relativ prim sind, haben wir auch

$$\alpha = p_n, \quad \gamma = q_n.$$

Nehmen wir noch das vorletzte Näherungspaar p_{n-1}, q_{n-1} hinzu, so gilt nach 3) die Gleichung:

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n.$$

Daher erhalten wir eine Lösung unserer

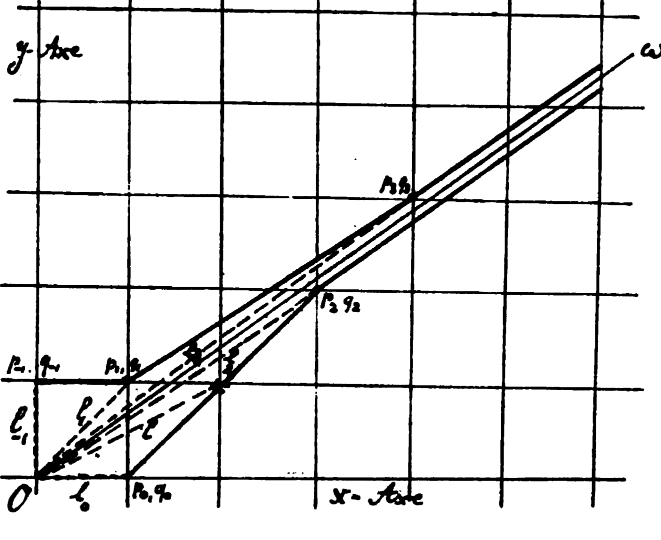
Gleichung, indem wir setzen

$\beta = (-1)^n p_{n-1}, \quad \delta = (-1)^n q_{n-1}$

<u>Die Kettenbruchentwickelung liefert uns also in ihrem vorletzten Näherungspaar (ev. bis auf das Vorzeichen) die gesuchte Lösung der Diophantischen Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.</u>

Der Tendenz dieser Vorlesung entsprechend fragen wir uns: was bedeuten alle diese Dinge geometrisch? Wir gewinnen dadurch ein lebhafteres Bild, als es die abstracten Formeln geben können.

Wir ziehen in unserem Gitter die Gerade $\omega = \frac{x}{y}$ u. markiren die Näherungspunkte von ω, d.h. die Gitterpunkte mit den Coordinaten p_r, q_r. Von den Hauptnäherungspunkten liegen nach



Gleichung 5) diejenigen mit geradem Index auf der Rechten, die mit ungeradem auf der Linken der w-Geraden. Desgleichen liegen die Nebennäherungspuncte, welche zwischen zwei Hauptnäherungspunkten mit geradem Index eingeschaltet sind, auf der rechten, die anderen auf der linken Seite.

Wir verbinden jeden der Näherungspunkte mit dem Nullpunkte O. Die Verbindungsstrecke des r ten Näherungspunktes heisse l_r. Speciell sind l_1 und l_0 zwei auf der x resp. y-Axe aufgetragene Strecken von der Länge 1. Jeder Strecke l_r kommt eine gewisse Richtung und Größe zu. Es ist nun namentlich von der Mechanik her bekannt, daß man mit Strecken eine Operation vornehmen kann, welche man passend als Addition bezeichnet. Zwei Strecken addiren heißt: Den Anfangspunkt der einen an den Endpunkt der anderen ansetzen. Das Resultat der Addition ist die vom Anfangspunkte dieser nach dem Endpunkte jener

gezogene Verbindungsstrecke. Der moderne Name für Streckenrechnung ist Vectoranalysis.

Frei. d. 1. XI. Auf diese Streckenrechnung weisen uns unsere Recursionsformeln hin. Wir behaupten: es entsteht der Vector $\mathfrak{l}_r$ des r^{ten} Hauptnäherungspunktes aus dem Vector $\mathfrak{l}_{r-2}$, wenn wir zu diesem den Vector $\mathfrak{l}_{r-1}$ μ_r - mal addiren, und: es entsteht der Vector $\mathfrak{l}$ eines Nebennäherungspunktes, wenn wir zu $\mathfrak{l}_{r-2}$ den Vector $\mathfrak{l}_{r-1}$ ϱ - mal addiren. Oder, in den Symbolen der Streckenrechnung ausgedrückt:

$$\mathfrak{l}_r = \mathfrak{l}_{r-2} + \mu_r \mathfrak{l}_{r-1} \text{ bez.}$$

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{r-2} + \varrho\, \mathfrak{l}_{r-1}.$$

In der That sind diese Gleichungen nichts anderes als unsere früheren Gleichungen 2) und 2'). Spalten wir sie nämlich in „Componenten" d. h. projiciren wir die Strecken auf die x - und y - Axe, so ergeben sich gerade jene Recursionsformeln.

Wir wollen auch der Geraden ω einen Vector ($\mathfrak{L}$) zuordnen, welcher der Gl. (4) entsprechend gegeben ist durch

4') $\mathcal{L} = l_r + r_r\, l_{r-1}$.

Nun können wir die Reihe der successiven Näherungspunkte nach folgender Regel geometrisch bestimmen. Wir beginnen in dem Punkte $p_{-1}\, q_{-1}$ und setzen an diesen die Strecke l_0 μ_1-mal an. Wir kommen dadurch zu $p_1 q_1$; die Verbindungsstrecke von O nach $p_1 q_1$ ist l_1. Dann gehen wir zum Punkte $p_0\, q_0$ über und tragen an diesen die Strecke l_1 μ_2-mal an, wodurch wir nach $p_2 q_2$ gelangen. Die Strecke von O nach $p_2 q_2$ heisst l_2. Jetzt tragen wir an $p_1 q_1$ μ_3-mal die Strecke l_2 ab u. s. f. Jedesmal ziehen wir die Geraden, welche von dem r^{ten} nach dem $(r+2)^{ten}$ Näherungspunkt führen, aus. Zusammen bilden sie zwei <u>Polygonzüge</u>, einen rechten und einen linken. <u>Die Ecken derselben sind die Hauptnäherungspunkte. Die Nebennäherungspunkte aber sind einfach die sonstigen auf den Polygonzügen gelegenen Gitterpunkte.</u> Betrachten wir nämlich die Polygonseite, welche von p_{r-2}, q_{r-2} nach p_r, q_r hinführt. Dieselbe läuft der

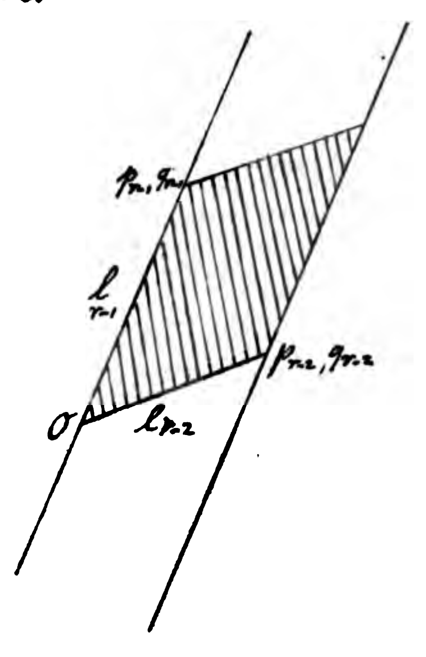
Strecke l_{r-1} parallel. Die Strecke l_{r-1} selbst enthält in ihrem Innern keinen Gitterpunkt; es bedeutet dieses nichts Anderes, als wenn wir oben sagten: Die Zahlen p_{r-1}, q_{r-1} sind relativ prim. Desgleichen können wir bei einmaligem Abtragen von l_{r-1} an p_{r-1}, q_{r-2} keinen Gitterpunkt treffen. Wohl aber ist der Endpunkt der abgetragenen Strecke ein Gitterpunkt u. zw. der erste zwischen dem $(r-2)$ten und $r$ten Hauptnäherungspunkt eingeschaltete Nebennäherungspunkt. Indem wir so fortfahren sehen wir, dass auf unserer Polygonseite im Ganzen $u_r - 1$ Gitterpunkte liegen, und dass dieses gerade die $u_r - 1$ zwischen $(r-2)$ und (r) eingeschalteten Nebennäherungspunkte sind.

Die Zahlen u_r haben wir bisher stillschweigend aus der Rechnung übernommen. Es erübrigt noch, auch diese geometrisch zu bestimmen. Das gelingt, wenn wir die ω – Linie, welche sich zwischen unsern Polygonzügen hindurchzieht, berücksichtigen.

Die Gleichung 4) zeigt, dass, wenn wir von p_{r-2}, q_{r-2} den Vector l_{r-1}, statt u_r-mal (u_r+1) mal antragen, wir die ω-Linie passiren würden. In der That dürfen wir nach jener Gleichung an l_r nur einen Bruchteil (r_r) von l_{r-1} ansetzen, um in einen Punkt von ω zu gelangen. Mithin bedeutet u_r das grösste Multiplum von l_{r-1}, welches ich zum Punkte $(r-2)$ addiren darf, ohne die ω-Gerade zu treffen. Dieses die geometrische Definition der Zahlen u_r!

Unsere Beschreibung der Polygonzüge ist aber bisher noch recurrent und daher nicht sehr übersichtlich. Wir erhalten sie mit einem Schlage, wenn wir folgende Betrachtungen anstellen, bei denen wir uns ω zuvörderst als irrationale Grösse denken, so dass die beiden Polygonzüge auf den beiden Seiten der ω Linie in's Unendliche laufen: Das Parallelogramm, welches O zu einer Ecke und l_{r-2}, l_{r-1} zu Seiten hat, ist ein Elementarparallelogramm; Der Flächeninhalt desselben beträgt

nämlich 1 (nach dem Determinantensatze der Kettenbrüche (s. Gl. 3)) und seine Ecken sind Gitterpunkte. Dasselbe kann in seinem Innern keinen Gitterpunkt enthalten, sonst könnten wir nämlich nicht, wie es nach der Definition der Elementarparallelogramme möglich sein muß, durch Verschiebung desselben ein Parallelgitter erhalten, welches sämtliche Gitterpunkte der Ebene zu Eckpunkten hat. Aus unserem Elementarparallelogramm erhalten wir nun durch fortgesetzte Aneinanderreihung congruenter Parallelogramme (vergl. die Figur) einen „Elementarstreifen“. Dieser kann ebenso wenig wie das einzelne Parallelogramm einen Gitterpunkt im Innern



enthalten. Nun fassen wir den in der vorhergehenden Figur von unsern beiden Polygonzügen eingeschlossenen Raum in's Auge. Dieser lässt sich in einzelne (übrigens wechselweise übereinander greifende) Stücke von Elementarstreifen zerlegen. Daher findet sich auch zwischen unsern Polygonzügen kein einziger Gitterpunkt.

Nun zerlegt unsere w- Gerade die Gitterpunkte des Quadranten zwischen der positiven x- und y- Axe in zwei Klassen, in solche, welche links, und solche, welche rechts von der w- Geraden liegen. Betrachten wir den von den ersteren gebildeten Punkthaufen. Sein Umrisspolygon besteht zunächst aus der positiven y Axe von $y = \infty$ bis $y = 1$; des Weiteren ist das Umrisspolygon identisch mit unserem linken Polygonzuge. Der grösseren Anschaulichkeit wegen, können wir etwa in den Gitterpunkten dieses Haufens Stifte befestigt denken und einen Faden um die Gesamtheit dieser Stifte

herumschlingen. Straff gezogen nimmt derselbe genau die Gestalt unseres linken Polygonzuges an. In derselben Weise verfahren wir mit dem rechts von der w-Geraden gelegenen Punkthaufen. Sein Umrisspolygon bez. ein herumgeschlungener Faden liefert uns den rechten Polygonzug. Dies ist die einfache hier zu gebende Definition, von der wir in der Folge vielfach Gebrauch machen werden.

Do. d. 8. XI. Wir haben noch anzugeben, welche Besonderheiten eintreten, wenn wir ω gleich einer rationalen Grösse $\frac{\alpha}{\gamma}$ annehmen. Die ω-Linie zerlegt die Gitterpunkte zwar wiederum in zwei Klassen, in links bez. rechts gelegene Punkte. Dabei bleiben aber noch die Gitterpunkte auf der ω-Linie selbst übrig, welche wir nach Belieben der einen oder anderen Klasse zurechnen können. Thun wir das erstere (fig. 1), so müssen wir zu unserm linken Umrisspolygon das Stück der ω-Geraden von dem letzten Näherungs

punkte ($p_n, q_n = \alpha, \gamma$) bis ∞ hinzurechnen. Das rechte Umrisspolygon läuft dann nach unserer geometrischen Construction gleichfalls in eine unendlich lange Strecke aus, welche von p_{n-1}, q_{n-1} parallel zur ω Geraden in's Unendliche reicht. Rechnen wir aber den rationalen Punkt α, γ und die Vielfachen desselben ($m\alpha, m\gamma$) zu den rechts von ω gelegenen Punkten, so enthält das rechte Polygon die unendlich lange Seite α, γ bis ∞, während das linke Poly-

Fig. 1. $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}$

Fig. 2. $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

gon die Seite p_{r-2}, q_{r-2} bis ∞ bekommt, welche der w-Geraden parallel ist. Beidemal liegt zwischen den Polygonzügen ein Elementarstreifen, im ersten Falle rechts, im zweiten links von der □-Linie.

Die geometrische Construction des Kettenbruches führt uns so noch etwas weiter, als die ursprüngliche Berechnung, indem sie uns in den unendlich fernen Ecken der Polygone noch zwei neue Näherungspunkte liefert. Wir haben somit, wie oben an den Anfang des Kettenbruches die Näherungspunkte p_0, q_0 und p_{-1}, q_{-1}, jetzt auch an das Ende desselben zwei ergänzende Näherungspunkte, p_{n+1}, q_{n+1} und p_{n+2}, q_{n+2} hinzugefügt, welche beide im Unendlichen liegen. Wir können auch arithmetisch zu ihnen gelangen, wenn wir uns das Abbrechen des Kettenbruches dadurch hervorgebracht denken, dass auf den Teilnenner μ_n eine Zahl $\mu_{n+1} = \infty$ folgt. Halten wir dann die Gültigkeit der Recursionsformeln auch für $r > n$

aufrecht, so ergibt sich der Punkt

$$p_{n+1} = \mu_{n+1} p_n + p_{n-1} = \infty \qquad q_{n+1} = \mu_{n+1} q_n + q_{n-1} = \infty \quad \text{mit } \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = w.$$

Dieselben Werte erhalten wir, wenn wir noch μ_{n+2} ganz beliebig wählen, aus der Recursionsformel auch für p_{n+2}, q_{n+2}, was mit unserer Construction übereinstimmt.

Auch die Möglichkeit der zwei verschiedenen Constructionen in Figur 1) und 2) lässt sich leicht arithmetisch begreifen. Haben wir nämlich einen Kettenbruch mit $\mu_n > 1$, so können wir statt $\frac{\alpha}{\gamma} = \mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \dots \cfrac{1}{\mu_n}}$ schreiben $\frac{\alpha}{\gamma} = \mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \dots \cfrac{1}{(\mu_n - 1) + \frac{1}{1}}}$

haben wir aber $\mu_n = 1$, so können wir für $\frac{\alpha}{\gamma} = \mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \dots \cfrac{1}{\mu_{n-1} + \frac{1}{1}}}$ setzen $\frac{\alpha}{\gamma} = \mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \dots \cfrac{1}{(\mu_{n-1} + 1)}}$

Wir haben es also allemal in der Hand, durch diese kleine Umänderung dem Kettenbruch nach Belieben eine gerade oder ungerade Anzahl von Gliedern zu geben. Geben wir ihm eine ungerade

Anzahl, bewirken also, dass n ungerade ist, so gehört p_n, q_n (wie alle Näherungspunkte mit ungeradem Index) zum linken Polygonzuge und wir kommen auf die Figur 2. Geben wir ihm eine gerade Anzahl, so wird p_n, q_n ein Punkt des rechten Polygonzuges, und wir erhalten die Figur 2.

Wir bemerken noch, daß die Annahme α und $\gamma > 0$ keine wesentliche ist. Im entgegengesetzten Falle können wir nämlich dieselben Constructionen in einem der anderen Quadranten ausführen.

Hiernach kommen wir noch einmal auf die Diophantische Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ zurück. Wir werden die Gesammtheit der Lösungen in zwei Kategorien teilen. Wir können nämlich entweder annehmen, daß

a) $\alpha > \beta$ oder daß b) $\alpha < \beta$,

dann wird auch, von den allerniedersten Fällen, die uns nicht interessiren, abgesehen, gleichzeitig sein:

a) $\gamma > \delta$ bez. b) $\gamma < \delta$.

Um alle Fälle a) aufzuzählen, nehmen

wir α und γ beliebig (natürlich relativ prim) an und entwickeln $\frac{\alpha}{\gamma}$ in einen Kettenbruch von einer geraden Anzahl von Gliedern. Den vorletzten Näherungsbruch nennen wir $\frac{\beta}{\delta}$, während der letzte $\frac{\alpha}{\gamma}$ wird. Dann haben wir $\alpha\delta - \beta\gamma = (-1)^n = +1$ und gleichzeitig (wegen $p_n > p_{n-1}$) $\alpha > \beta$. Um alle Fälle b.) zu gewinnen, nehmen wir β u. δ relativ prim und im Übrigen beliebig an, entwickeln $\frac{\beta}{\delta}$ in einen Kettenbruch von einer ungeraden Gliederzahl; den vorletzten Näherungsbruch nennen wir $\frac{\alpha}{\gamma}$. Dann haben wir $\beta\gamma - \alpha\delta = (-1)^n$ oder $\alpha\delta - \beta\gamma = (-1)^{n+1} = +1$ und gleichzeitig $\alpha < \beta$.

Endlich kommen wir zu unserer Ausgangsfrage zurück: Wie können wir in ein gegebenes Punktgitter Parallelengitter einzeichnen? Als Beziehung zwischen den Coordinaten eines Gitterpunktes im neuen Gitter (x', y') und den Coordinaten desselben Punktes im alten Gitter (x, y) fanden wir früher (pg. 3)

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y',$$

wobei $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ sein musste und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze und paarweise relativ prime Zahlen wären. Wir denken sie uns diesen Bedingungen entsprechend irgendwie gegeben. Setzen wir $\frac{x}{y} = \omega$, $\frac{x'}{y'} = \omega'$, so lautet die Beziehung zwischen ω und ω' folgendermassen:

$$\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}$$

Diese Beziehung können wir nun auf Grund unserer neuesten Entwickelungen auch in die Gestalt eines Kettenbruches umsetzen. Zum Beweise unterscheiden wir die obigen Fälle a) und b).

Im Falle a) ($\alpha > \beta$) entwickeln wir $\frac{\alpha}{\gamma}$ in einen Kettenbruch:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cdots + \cfrac{1}{\mu_n}}$$

von einer geraden Gliederzahl. Wir setzen dann, in Übereinstimmung mit den genannten Bedingungen für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, wie oben:

$\alpha = p_n$, $\gamma = q_n$, $\beta = p_{n-1}$, $\delta = q_{n-1}$.

Daneben betrachten wir den folgenden Kettenbruch:

α) $(u_1 + \frac{1}{(u_2 + \ldots \frac{1}{(u_n + \frac{1}{w'})}}$

Derselbe stimmt in den $n-1$ ersten Gliedern mit dem vorhergehenden überein. Daher sind auch seine $n-1$ ersten Näherungsbrüche identisch mit denen des vorhergehenden; der n te Näherungsbruch (d. h. der Wert des ganzen Kettenbruches) entsteht aus dem n ten Näherungsbruche des vorhergehenden durch Vertauschung von u_n mit $(u_n + \frac{1}{w'})$. Daher ist der Wert unseres Kettenbruches α) gleich

$$\frac{(u_n + \frac{1}{w'})\, p_{n-1} + p_{n-2}}{(u_n + \frac{1}{w'})\, q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n + \frac{p_{n-1}}{w'}}{q_n + \frac{q_{n-1}}{w'}} =$$

$$\frac{\alpha w' + \beta}{\gamma w' + \delta}.$$

Unser Kettenbruch α) hat also den Wert w.
Im Falle b) $(\alpha < \beta)$ entwickeln wir $\frac{\beta}{\delta}$ in einen Kettenbruch $\frac{\beta}{\delta} = (u_1 + \frac{1}{(u_2 + \ldots \frac{1}{u_n}}$ von ungerader Gliederzahl n, wobei, wie oben, $\beta = p_n$, $\delta = q_n$, $\alpha = p_{n-1}$, $\gamma = q_{n-1}$ ge-

setzt werden darf. Daneben stellen wir den folgenden Kettenbruch:

$$(u_1 + \frac{1}{(u_2 + \ldots \frac{1}{(u_n + \omega')}}$$

Sein Wert ist

$$\frac{(u_n+\omega')p_{n-1} + p_{n-2}}{(u_n+\omega')p_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n + \omega' p_{n-1}}{q_n + \omega' q_{n-1}} = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}$$

Unser Kettenbruch b) hat also wieder den Wert ω. Wir haben also das zusammenfassende Resultat: Ist ω mit einer Grösse ω' verbunden durch die Gl:

$$\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta},$$

wo zwischen den ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Relation besteht $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, so kann man die Abhängigkeit der Grösse ω von ω', je nachdem der Fall a) oder b) vorliegt, durch den Kettenbruch a) oder b) darstellen.

Die Rechenoperationen, durch welche wir nach den Formeln a) oder b) ω successive aus ω' herstellen, wollen wir nun symbolisch mit Namen belegen. Es bedeute $T\omega'$ den Übergang zum recipro-

ken Werte

$$T\omega' = \frac{1}{\omega'},$$

und $S\omega'$ die Hinzufügung der Einheit

$$S\omega' = \omega' + 1.$$

Dann können wir den Kettenbruch in die folgende symbolische Form schreiben:

$$\omega = S^{\mu_1} T S^{\mu_2} T \ldots S^{\mu_n} T \omega' \quad \text{im Falle a)},$$

$$\omega = S^{\mu_1} T S^{\mu_2} T \ldots S^{\mu_n} \omega' \quad \text{im Falle b)}.$$

Bei den Formeln ist gemeinsam, daß die Operation T eine gerade Anzahl von Malen (nämlich n mal bez. $n-1$ mal) vorkommt. Dies folgt übrigens mit Notwendigkeit schon daraus, daß die Determinante der Substitution

$$\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta},$$

welche $+1$ ist, gleich wird dem Produkte aus den Determinanten aller einzelnen Substitutionen S und T. Nun hat S die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +1$ und T die Determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$. Daher muß T eine gerade Anzahl von Malen vorkommen.

Unsere vorstehende symbolische Schreibweise des Kettenbruches enthält einen wichtigen Satz, welchen wir in der

Sprache der Substitutionentheorie folgendermassen aussprechen:

Jede ganzzahlige Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ von der Determinante 1 lässt sich zusammensetzen, indem man die Operationen S und T als „erzeugende Operationen" in geeigneter Combination und Wiederholung verwendet.

Derselbe Satz gilt natürlich auch, wenn wir von den gebrochenen Substitutionen der ω und ω' übergehen zu den homogenen Substitutionen der Variabeln (x, y) und (x', y'). Auch diese lassen sich aus den Substitutionen:

$$S \left| \begin{matrix} x = x' + y' \\ y = \, y' \end{matrix} \right| \text{ und } T \left| \begin{matrix} x = y' \\ y = x' \end{matrix} \right|$$

erzeugen nach dem Schema:

$$(x, y) = S^{\mu_1} T S^{\mu_2} T \ldots S^{\mu_n} T (x', y') \text{ im Falle a)}$$
$$(x, y) = S^{\mu_1} T S^{\mu_2} T \ldots S^{\mu_n} (x', y') \quad . \quad . \quad \text{b)}.$$

Frei. d. 9. VII. Diese successive Erzeugung der Substitutionen hat auch eine einfache geometrische Bedeutung. Wir wollen uns dabei auf den Fall a) beschränken, weil der Fall b) ebenso zu behandeln ist. Für unsern Zweck ist es bequem, neben S als

zweite Operation die folgende einzuführen:

$$S' = TST \quad \left| \begin{array}{l} x = x' \\ y = x' + y' \end{array}\right.$$

Da nun ersichtlich

$$TS^{n}T \cdot TST \cdot TST \cdots = S'^{n}$$

so drückt sich unsere Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ durch die Operation S und S' folgendermassen symbolisch aus:

$$(x\,y) = S^{n_1} S'^{n_2} S^{n_3} S'^{n_4} \ldots S^{n_{n-1}} S'^{n_n} (x', y').$$

Um diese Formel geometrisch zu deuten, führen wir den Begriff: „Elementarfigur des Coordinatensystems" ein. Wir verstehen unter der Elementarfigur den Inbegriff zweier Vectoren, des Einheitsvectors der x- und der y-Axe. Bei den Operationen S und S' wird diese Elementarfigur in einfacher Weise geändert. Bei

Operation S; Operation S'

$$S \left\{ \begin{array}{l} x = x' + y' \\ y = y' \end{array} \right\}$$

nämlich bleibt der x-Vector ungeändert (der Punkt $x' = 1$, $y' = 0$ hat im alten System

die Coordinaten $x=1, y=0$), der y-Vector dagegen wird geändert u. zw. entsteht der neue y-Vector aus dem alten, indem man zu dem letzteren den x-Vector hinzufügt, (der Punkt $x'=0, y'=1$ hat im alten System die Coordinaten $x=1, y=1$.) Bei der Operation S' findet das Umgekehrte statt. In gleicher Weise wird S^u bez. S'^u den Übergang von einer Elementarfigur zu einer neuen bedeuten, wobei man zu dem y-(bez x)-Vector u-mal den x-(bez. y-) Vector hinzufügt, während man den x (bez. y-) Vector ungeändert lässt. Durch gesetzmässige Wiederholung solcher Übergänge entsprechend unserer symbolischen Gleichung, entsteht schliesslich die Elementarfigur des x', y' Systems aus der des x, y Systems.

Ein Zahlenbeispiel wird dies erläutern. Es sei

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Da hier vermöge $8 > 5$ der Fall a vorliegt, entwickeln wir $8/3$ in einen Kettenbruch von gerader Gliederzahl

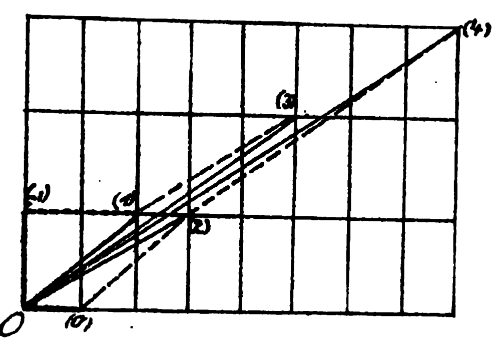
$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}.$$

Unsere Operationsvorschrift lautet daher

$(x, y) = S^2 S' S S'(x', y')$.

Gleichzeitig mit der Kettenbruchentwickelung ziehen wir auch ihr geometrisches Gegenbild, die Umrisspolygone, in Betracht. Im Anschluss an diese verlaufen unsere Operationen folgendermassen:

Die ursprüngliche Elementarfigur besteht aus den Strecken O(0) und O(-1). Die Operation S^2 bedeutet, dass wir die erstere Strecke, den y-Vector, längs der Polygonseite $\overline{(-1)(1)}$ verschieben. Die neue Elementarfigur besteht aus den Strecken O(0), O(1). Der Operation S' entsprechend haben wir an den Vector



O(0) den Vector O(1) anzusetzen d. h. wir haben den ersteren längs der Polygonseite $\overline{(0)(2)}$ zu verschieben. Die so entstehende Elementarfigur wird gebildet von O(2) und O(1). Der nächste Schritt führt zu der Figur O(2) und O(3), der letzte endlich zu O(4)

und $O(3)$ d. h. zu der Figur des x', y'-Coordinatensystems.

Wir erkennen: Die Erzeugung der Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ aus der Wiederholung und Combination der beiden Operationen S, S' kommt darauf hinaus, dass wir die Elementarfigur des neuen Systems aus derjenigen des alten erhalten, indem wir den y- und x-Vector des Coordinatensystems alternirend an den successiven Seiten der beiden zur Kettenbruchentwickelung von $\frac{\alpha}{\gamma}$ gehörenden Umrisspolygone entlang schieben.

Analog natürlich, wenn der Fall b) vorliegen sollte. –

Wir kommen nun zu einer letzten Eigenschaft der Kettenbruchentwickelung, welche von Lagrange in seinen „Additions à l'algèbre d'Euler" 1748, (Werke Bd 7) entwickelt worden ist. Diese Arbeit betrifft ganz besonders die Theorie der Kettenbrüche nach deren Bedeutung für die Zahlentheorie; sie ist in dieser Hinsicht grundlegend gewesen.

Es sei ω irgend eine Zahl, welche wir der Einfachheit wegen als positiv und irrational annehmen. Wir betrachten die „ω-Linie", deren Gleichung $\omega y - x = 0$ ist. Verstehen wir unter x und y ganze Zahlen, so kann die ganzzahlige lineare Form

$$\omega y - x$$

den Wert Null offenbar nicht annehmen. Daher kann man nach einem Minimum von

$$|\omega y - x|$$

fragen. Allerdings wird es ein absolutes Minimum nicht geben können; lässt man nämlich die ganzen Zahlen x und y in geeigneter Weise immer grösser werden, so wird man sich dem Werte 0 unbegrenzt nähern. Lagrange fragt daher nach einem <u>relativen Minimum</u>, d. h. nach solchen ganzen Zahlen x, y, für welche immer

$$|\omega y - x| \leq |\omega y' - x'|,$$

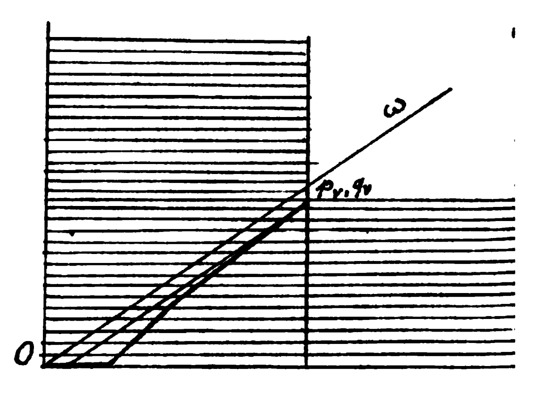
falls nur $y' \leq y, x' \leq x$. Bemerkt man, dass in rechtwinkligen x, y-Coordinaten

$$\left| \frac{\omega y - x}{\omega^2 + 1} \right|$$

den Abstand des Punktes x, y von der w-Geraden bedeutet, so kann man die Frage geometrisch folgendermassen stellen: Es soll ein Gitterpunkt x, y gefunden werden, welcher unter allen Gitterpunkten die im Innern oder auf dem Rande des Rechtecks mit den Seiten x, y liegen, den kleinsten Abstand von der w-Linie hat. *Wir werden sehen, dass die Hauptnäherungspunkte $p_r\, q_r$ der Kettenbruchentwickelung und nur diese die in Rede stehende Eigenschaft besitzen.*

Wir wollen übrigens den Punkt p_r, q_r nicht nur mit den Punkten des *Rechtecks*, für welche $x' \leqq x$ *und* $y' \leqq y$ ist, vergleichen, sondern wollen noch die beiden ganzen *Streifen* hinzunehmen, für welche $x' \leqq x$ *oder* $y' \leqq y$ ist. (vergl. die Figur, bei welcher wir $p_r\, q_r$ rechts von w genommen haben). Unsere Be-

hauptung zerfällt in 2 Teile, sie sagt aus: 1.) <u>es liegt in unserem schraffirten Gebiete rechts von der w-Geraden kein Gitterpunkt näher an dieser, als $p_r\ q_r$; 2.) dasselbe findet links von w statt.</u> Der Beweis ad 1.) ist sehr einfach. Wir ziehen durch p_r, q_r eine Parallele zur w-Linie. Es kommen dann nur solche Gitterpunkte für uns in Betracht, welche in dem von dieser Parallelen und der w-Linie aus dem schraffirten Gebiete ausgeschnittenen schmalen Streifen oder auf seiner Begrenzung liegen. Dieser Streifen fällt aber ganz zwischen die w-Linie und unseren rechten convexen Polygonzug, also in ein Gebiet, in welchem, wie wir wissen, überhaupt kein Gitterpunkt enthalten ist. Also ist p_r, q_r unter allen Gitterpunkten des schraffirten Gebietes rechts



von w der nächste an w.

Der Beweis ad 2) wird insofern ein wenig umständlicher, als wir hier 2 Fälle unterscheiden müssen.

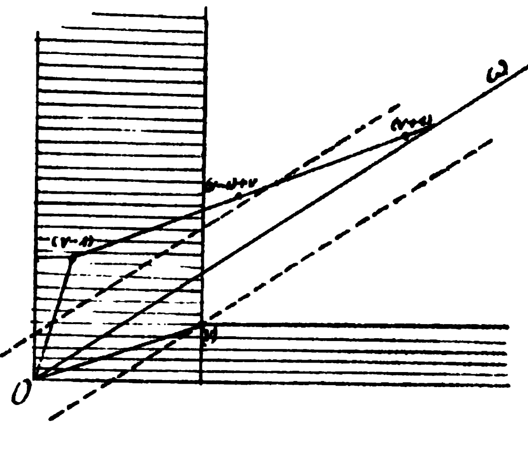
a) Die Polygonseite $(\nu-1)$ bis $(\nu+1)$ enthalte Nebenpunkte der Kettenbruchentwickelung in ihrem Innern, so dass in der Formel

$$(\nu+1) = (\nu-1) + \mu_{\nu+1}(\nu)$$

$\mu_{\nu+1} > 1$ ist.

b) sie enthalte keine Nebenpunkte, wo dann $\mu_{\nu+1} = 1$ ist.

Wir ziehen jetzt auch links von der ω-Linie eine Parallele zu dieser in demselben Abstande, wie vorher rechts davon. Dieselbe schneidet von der bis ω verlängerten Polygonseite



$(\nu-1)$-$(\nu+1)$ ein Stück von der Länge $O(\nu)$ ab, wie aus unserer Construction der

Umrißpolygone hervorgeht.

Im Falle a) liegt dieses Stück ganz außerhalb des schraffirten Gebietes. Denn es reicht von der ω-Linie noch nicht bis an den letzten Nebenpunkt der Seite $(\nu-1)-(\nu+1)$ heran, und dieser liegt seinerseits ausserhalb des schraffirten Gebietes. Daher fällt der von unserer Parallelen und der ω-Linie begrenzte Streifen, soweit er schraffirt ist, in das Gebiet zwischen die ω-Linie und das linke Umrisspolygon. In diesem Teile des Parallelstreifens kann sich also kein Gitterpunkt befinden.

Im Falle b) schneidet unsere Parallele das Umrißpolygon zwischen den Hauptpunkten $(\nu-1)$ und $(\nu+1)$. Der schraffirte Teil unseres Parallelstreifens greift jetzt möglicherweise noch mit einem kleinen Dreiecke über das Umrißpolygon hinaus. Während

sich für den übrigen Teil die Frage wie vorher erledigt, bleibt dieses Dreieck besonders zu untersuchen. Man setze zu dem Zwecke an die Seite $(\nu-1)-(\nu+1)$ des Elementarparallelogrammes $(O, (\nu-1), (\nu+1), (\nu))$ ein diesem congruentes Parallelogramm an. Unser fragliches Dreieck fällt dann ganz in das Innere des letzteren. In Folge dessen kann es keinen Gitterpunkt enthalten.

<u>Damit ist bewiesen, dass jeder Näherungspunkt $p_\nu\ q_\nu$ ein relatives Minimum von $|wy-x|$ liefert.</u>

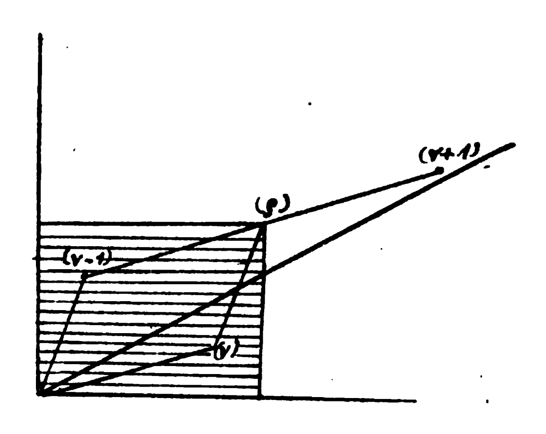
Es bleibt noch umgekehrt zu zeigen, dass <u>jeder Gitter-Punkt, welcher diese Eigenschaft besitzt, ein Näherungspunkt u. zw. ein Hauptnäherungspunkt ist.</u>

Wir thun dieses in 2 Schritten und zeigen, dass weder ein Nebenpunkt noch überhaupt irgend ein anderer Gitterpunkt ausserhalb des Umrisspolygons zu einem relativen Minimum Anlass geben kann.

1.) Wir betrachten die zwischen $(\nu-1)$ und $(\nu+1)$ eingeschalteten <u>Nebenpunkte</u>, deren Lage durch

$$(\nu-1)+\rho\,(\nu), \qquad \rho = 1, 2, \cdots a_{\nu+1}-1$$

bestimmt war. Construiren wir durch irgend einen dieser Nebenpunkte (ρ) die Parallelen zu den Coordinatenaxen, so enthält das entstehende Rechteck den (ν)ten Hauptpunkt im Innern. Denn nach der vorstehenden Formel werden die Coordinaten von (ρ) aus denen von



(ν) durch Hinzufügung positiver Stücke erhalten. Überdiess hat (ν) einen kleineren Abstand von ω wie (ρ). Dies haben wir bereits bei der Figur auf pag 43. gesehen. <u>Also liefert ein Nebenpunkt sicher kein relatives Minimum von $|\omega y - x|$.</u>

2.) Denselben Nachweis erbringen wir für irgend welche <u>Gitterpunkte ausserhalb unserer Polygonzüge.</u> Zu dem Zwecke zeigen wir (was eigentlich viel mehr ist), daß unter allen Punkten, welche näher an ω liegen als (ν) derjenige

mit den kleinsten Coordinaten x, y der Punkt $(\nu+1)$ ist.

Zu beiden Seiten der ω-Linie grenzen wir unsere beiden Parallelstreifen ab, in denen die fraglichen Punkte sämtlich enthalten sein müssen. Sodann ziehen wir durch $(\nu+1)$ Parallelen zur x- und y-Axe. Diese schneiden aus den Parallelstreifen ein Stück aus, welches in der Figur schraffirt ist. Wir haben zu zeigen, dass in diesem Stück ausser (ν) u. $(\nu+1)$ kein Gitterpunkt enthalten ist.

In der That, setzen wir an das Elementarparallelogramm $(0,(\nu-1),(\nu+1),(\nu))$ zwei congruente Parallelogramme längs der Seiten $(\nu-1)(\nu+1)$ und $(\nu)(\nu+1)$ an, so enthalten diese die beiden Zipfel des schraffirten Gebietes, welche über das erste Parallelogramm herausgreifen in ihrem Innern, wie man solches

im Einzelnen auf Grund unserer Construction erkennt. Nun liegen aber im Innern der Elementarparallelogramme sicher keine Gitterpunkte. Also sind (r) und $(r+1)$ die einzigen Gitterpunkte auf schraffirtem Gebiet und <u>$(r+1)$ ist unter allen Gitterpunkten, welche näher an ω liegen als (r), derjenige mit den kleinsten Coordinaten.</u>

Nun zur Betrachtung eines beliebigen Gitterpunktes x, y, welcher nicht einem der Polygonzüge angehört! Die Sache erledigt sich jetzt von selbst. Wir setzen voraus, dass (x, y) ein relatives Minimum von $|\omega y - x|$ ergebe. Unter den Gitterpunkten, welche eine kleinere x bez. y-Coordinate haben, als der Punkt x, y, wird es eine Reihe von Hauptnäherungspunkten geben. Sei (r) der letzte in dieser Reihe, so dass $p_r \leqq x$ oder $q_r \leqq y$, während $p_{r+1} > x$, oder $q_{r+1} > y$. Nach Annahme ist gleichzeitig $|\omega y - x| < |\omega p_r - q_r|$. In Folge dessen wäre unter den Gitterpunkten, welche einen kleineren Abstand von ω haben als (r), nicht $(r+1)$

sondern (x, y) derjenige mit den kleinsten Coordinaten. Dies steht aber in Widerspruch mit unserm vorhergehenden Resultat.

Somit ist bewiesen, dass kein anderer Gitterpunkt ein relatives Minimum unserer linearen Form ergeben kann, ausser den Hauptnäherungspunkten der Kettenbruchentwickelung. Es ist also auch die Umkehrung des Lagrange'schen Satzes vollständig dargethan.

Ich möchte im Anschlusse hieran noch eine Arbeit von Hurwitz (Math. Ann. Bd. 39 pg 279 u. f.) zur Sprache bringen, in welcher die Frage nach den Minimalwerten von $|\omega y - x|$ noch etwas weiter geführt wird. Das Resultat von Hurwitz lautet, in unsere Sprechweise übertragen: Man kann den Punkt x, y unter den Eckpunkten der Umrisspolygone immer so auswählen, dass

$$|\omega y - x| \leq \frac{1}{\sqrt{5}\, y}$$

wird. Construiren wir uns diejenigen Curven, welche dem Gleichheitszeichen entsprechen, d. h. die beiden Hyperbeln

$$\omega y^2 - xy = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \omega y^2 - xy = -\frac{1}{\sqrt{5}};$$

dieselben haben die x-Axe und ω-Linie zu Asymptoten und grenzen um diese einen schmalen Streifen ab. Der Hurwitz'sche Satz sagt dann einfach aus, daß jedenfalls einige Eckpunkte unserer Polygonzüge in bez. an diesen Streifen reichen. Jedenfalls wird sich auch der Beweis dieses Satzes bei Benutzung unseres Bildes besonders übersichtlich gestalten.

I. Hauptteil.

Wir kommen nun zu dem eigentlichen Thema dieser Vorlesung, zu der

Reductionstheorie der binären quadratischen Formen,

welche wir ein für allemal in die Gestalt setzen.

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

1. Geometrische Vorbegriffe.

Der zahlentheoretischen Betrachtung schikken wir einige <u>geometrische Überlegungen</u> von allgemeinem Charakter voraus, wie sie in allerdings viel umfassender Form in der Erlanger Programmschrift: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen: (abgedruckt in Ann. Bd. 43) entwickelt worden sind. Es handelt sich darum, die Gesamtwissenschaft der Geometrie nach allgemeinen mathematischen Gesichtspunkten einzuteilen, nicht darum, dieselbe vom philosophischen Standpunkte grundsätzlich aufzubauen. In diesem Sinne nehmen wir für das Folgende ein rechtwinkliges Coordinatensystem als gegeben an; übrigens genügt es für unsere Zwecke von der Geometrie der Ebene zu handeln.

Unsere Einteilung ist eine gruppentheoretische. Wir unterscheiden soviele Arten von Geometrie, als es Gruppen von Operationen giebt, denen wir die geometrischen Gebilde unterwerfen mögen.

1.) "Wir beginnen mit der metrischen oder elementaren Geometrie. Hier betrachtet man diejenigen Figuren als gleichwertig, welche sich nur durch die Lage oder durch den Maasstab der Zeichnung unterscheiden. Man lässt also die Operationen der Bewegung und der Ähnlichkeitstransformation zu. Ihren analytischen Ausdruck finden sie in den Gleichungen:

$$x = aX + bY + c \qquad a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2$$
$$y = a'X + b'Y + c' \qquad ab + a'b' = 0.$$

Das x, y und das X, Y-System sind entweder congruent oder ähnlich, entweder gleichstimmig oder entgegenstimmig.

Die hierdurch umgrenzten Operationen bilden eine Gruppe, welche Hauptgruppe heisst. Die Hauptgruppe umfasst alle diejenigen Operationen, bei denen die inneren Eigenschaften der Figuren ungeändert bleiben. Umgekehrt gehören nur solche Eigenschaften in die Geometrie, welche ungeändert bleiben bei den Operationen

der Hauptgruppe. Durch diese Beziehung zur Hauptgruppe unterscheidet sich die Geometrie der Ebene von einer individuellen Betrachtung der Wertsysteme x, y. Elementargeometrie, so können wir auch sagen, ist Invariantentheorie der Hauptgruppe.

2.) Neben die Elementargeometrie stellt sich als zweite die affine Geometrie. Ihre Gruppe besteht aus sämtlichen affinen Transformationen, also aus den Umänderungen

$$x = aX + bY + c,$$
$$y = a'X + b'Y + c',$$

wo jetzt die Bedingungsgleichungen für die Coefficienten in Wegfall kommen. Sie entstehen aus den Transformationen der Hauptgruppe durch Hinzunahme beliebiger Parallelprojectionen. Die affine Geometrie interessirt sich nur für solche Eigenschaften der Figuren, welche durch affine Operationen nicht zerstört werden.

3.) Die nächst höhere Geometrie ist die projective. Ihre Gruppe besteht

1.) … Veränderungen der folgenden
oder …
trach…
gleich…
die …
der …
lässt …
gung …
mation …
druck …

$x' = aX + …$

$y' = aX + …$

Das x', y' …
entweder …
weder glei…
stimmig.

Die hier…
nen bilden …
gruppe he…
fasst alle …
denen d…
Figuren …
…hrt g…
in …
der…

… Operationen sind hier
…jectionen hinzugekommen.
… Geometrie sieht man
… solche Eigenschaften
… bei beliebiger Central=
… bei beliebiger Verände=
…ktes im Raume
… der Projections=
…ben. — So kann man
… indem man die
… um neue Operatio=
…desmal die Invar=
… erweiterten Grup=

… Geometrie ist die
… die Entfernung
… sie das Doppel=
…ffinen Geometrie
… auch der Flä=

cheninhalt der Figuren invariant. Sehen wir nämlich von den constanten Gliedern in den Transformationsgleichungen ab, deren Hinzunahme nur eine Verschiebung, also eine Transformation der Hauptgruppe, bedeutet, so können wir sie schreiben:

$$x = aX + bY$$
$$y = cX + dY.$$

Sind $0\,0$, $x\,y$, $x'\,y'$ die Ecken eines Dreiecks in ursprünglicher, $0\,0$, $X\,Y$, $X'\,Y'$ in transformirter Lage, so wird sein Inhalt

$$\tfrac{1}{2}(xy' - x'y) = \tfrac{1}{2}(ad - bc)(XY' - X'Y).$$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks und, da man jede Figur aus einer Anzahl von Dreiecken zusammensetzen kann, auch der Flächeninhalt jeder Figur ändert sich bei ~~affiner~~ Transformation also nur um die Determinante der Substitution. Liegt der für das Spätere wichtige Fall vor, daß die Determinante gleich Eins ist, so bleibt der Flächeninhalt schlechtweg invariant.

Im Vorhergehenden gingen wir genetisch vor, indem wir durch succes-

aus den Umänderungen der folgenden Form

$$x = \frac{aX + bY + c}{a''X + b''Y + c''},$$

$$y = \frac{a'X + b'Y + c'}{a''X + b''Y + c''}$$

Zu den bisherigen Operationen sind hier die *Centralprojectionen* hinzugekommen. In der projectiven Geometrie sieht man als wesentlich nur solche Eigenschaften an, welche auch bei beliebiger Centralprojection, also bei beliebiger Veränderung des Augenpunktes im Raume und beliebiger Stellung der Projectionsebene erhalten bleiben. — So kann man successive fortgehen, indem man die Gruppe der Geometrie um neue Operationen erweitert und jedesmal die Invariantentheorie dieser erweiterten Gruppe studirt. —

In der metrischen Geometrie ist die wichtigste Invariante die *Entfernung*, in der projectiven ist sie das *Doppelverhältniss*. In der affinen Geometrie bleibt neben letzterem auch der *Flä=*

cheninhalt der Figuren invariant. Sehen wir nämlich von den constanten Gliedern in den Transformationsgleichungen ab, deren Hinzunahme nur eine Verschiebung, also eine Transformation der Hauptgruppe, bedeutet, so können wir sie schreiben:

$$x = aX + bY$$
$$y = cX + dY.$$

Sind $0\,0$, $x\,y$, $x'\,y'$ die Ecken eines Dreiecks in ursprünglicher, $0\,0$, $X\,Y$, $X'\,Y'$ in transformirter Lage, so wird sein Inhalt

$$\tfrac{1}{2}(xy' - x'y) = \tfrac{1}{2}(ad - bc)(XY' - X'Y).$$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks und, da man jede Figur aus einer Anzahl von Dreiecken zusammensetzen kann, auch der Flächeninhalt jeder Figur ändert sich bei affiner Transformation also nur um die Determinante der Substitution. Liegt der für das Spätere wichtige Fall vor, dass die Determinante gleich Eins ist, so bleibt der Flächeninhalt schlechtweg invariant.

Im Vorhergehenden gingen wir genetisch vor, indem wir durch succes-

sive Abstraction von der metrischen Geometrie zur projectiven aufstiegen. Systematischer gestaltet sich noch das umgekehrte Verfahren. Wir suchen zunächst diejenigen Verhältnisse der geometrischen Figuren auf, welche bei allen Umformungen der projectiven Gruppe erhalten bleiben. Um zum Standpunkte der affinen Geometrie überzugehen, adjungiren wir die unendlich ferne Gerade und ziehen dementsprechend nunmehr denjenigen Teil der projectiven Umformungen in Betracht, welche die unendlich ferne Gerade in sich überführen. In entsprechender Weise kommen wir von der affinen zu der metrischen Geometrie, wenn wir die beiden Kreispunkte adjungiren (vergl. auch hierzu das Erlanger Programm).

Dies Verfahren trägt gleichzeitig die Möglichkeit einer Verallgemeinerung in sich. Wir könnten ja bei dem Übergang von der affinen zur metrischen Geometrie auch zwei andere Punkte

der unendlich fernen Geraden ebenso gut festhalten, als gerade die Kreispunkte. Wir gelangen dann nicht zur gewöhnlichen metrischen Geometrie, sondern zu einer allgemeinen, pseudometrischen (oder besser gesagt, wie Salmon ursprünglich wollte, zu einer quasimetrischen) Geometrie. Die gewöhnliche metrische Geometrie erweist sich dann als ein specieller Fall der letzteren.

Sind $x : y : t$ gewöhnliche homogen gemachte rechtwinklige Coordinaten, so werden die Kreispunkte bekanntlich durch die folgenden Gleichungen bestimmt: $x^2 + y^2 = 0$, $t = 0$. Entsprechend lautet der Ausdruck für die Entfernung in der gewöhnlichen Geometrie $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Statt der Kreispunkte wählen wir in der Pseudogeometrie die auf der unendlich fernen Geraden gelegenen Nullpunkte einer beliebigen quadratischen Form, d. h. die Punkte:

$$f = ax^2 + bxy + cy^2 = 0, \quad t = 0,$$

als Grundpunkte der Maassbestimmung und definiren als Pseudoentfernung

(indem wir wieder $t = 1$ setzen) den folgenden Ausdruck

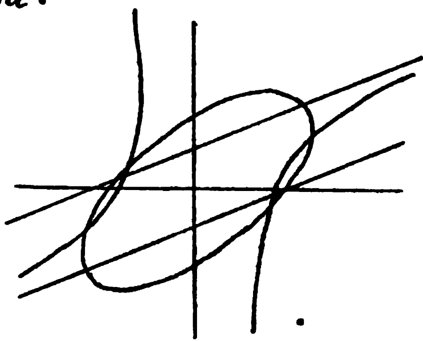
$$r = \sqrt{ax^2 + bxy + cy^2}.$$

Drei Fälle sind dabei zu unterscheiden. Die Grundpunkte können zwei conjugirt imaginäre, zwei getrennte reelle oder zusammenfallende Punkte sein, jenachdem $b^2 - 4ac < 0, > 0$ oder $= 0$ ist. Im ersten Fall ist die Form $f(x, y)$ eine definite, positive oder negative. Die Curve $r^2 = 1$, welche dem Einheitskreise der gewöhnlichen Geometrie entspricht, wird, in der gewöhnlichen Maassbestimmung betrachtet, eine Ellipse oder ein imaginärer Kegelschnitt, je nachdem f eine positive oder negative Form ist. Wir werden unsere Betrachtung auf den Fall der positiven Formen beschränken, weil die negativen leicht auf diese zurückgeführt werden können. Wir wollen daher sagen: im ersten Falle wird der Pseudokreis $r^2 = 1$ eine Ellipse; dementsprechend nennen wir diesen den elliptischen Fall der Maassbestimmung.

Im zweiten Falle wird die Curve $r^2 = 1$ eine Hyperbel; dies nennen wir den hyperboli-

schen Fall. Den dritten Fall werden wir als parabolischen bezeichnen. Die Curve $r^2 = 1$ besteht hier aus den beiden geraden Linien

$$ax + \frac{by}{2} = \pm\sqrt{a}.$$



Damit haben wir den allgemeinen, man möchte sagen, souveränen Standpunkt der Cayley'schen Maassbestimmung bezeichnet. Das Wesentliche ist, dass wir die Maassbestimmung nicht als etwas durch die Natur der Ebene von vorneherein gegebenes ansehen, vielmehr durch freiwillige Festsetzung der Ebene auferlegen. Es wird unsere nächste Aufgabe sein, uns mit dem verschiedenen Charakter der dreierlei Fälle im Einzelnen vertraut zu machen.

1. Elliptischer Fall.

Die Entfernung eines Punktes x, y von dem Nullpunkte wurde bereits definirt durch die Gl. $r^2 = f(x, y)$. In entsprechender Weise werden wir für die Entfernung

irgend zweier Punkte x y und x' y' den Ausdruck festsetzen: $r^2 = f(x-x', y-y')$. Das System der Curven $r = \text{const.}$, welches den concentrischen Kreisen in der gewöhnlichen Geometrie entspricht, besteht aus einem Systeme ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen.

Weiter haben wir den Begriff des Winkels in die Pseudogeometrie zu übertragen. In der gewöhnlichen Geometrie berechnet sich der Winkel zweier Strecken $O(x, y)$ und $O(x', y')$ folgendermassen:

$$\varphi = \arccos \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}} = \arcsin \frac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}.$$

In unserer allgemeinen Maassbestimmung müssen wir natürlich den Winkel so definiren, daß er in die vorstehende Grösse übergeht, falls wir die Grundpunkte der Maassbestimmung durch affine Transformation, also homogene lineare Transformation der x und y, in die Kreispunkte rücken lassen. Dementsprechend setzen wir $ax^2 + bxy + cy^2$ an die Stelle von $x^2 + y^2$ und bilden statt $xx' + yy'$,

welcher Ausdruck die Polare des Punktes $x'y'$ in Bezug auf das Geradenpaar $x^2+y^2=0$ darstellt, die Polare $axx'+b(xy'+x'y)+cyy'$ in Bezug auf unser neues Geradenpaar $ax^2+bxy+cy^2=0$. Somit definiren wir den Winkel der Strecken $O(x,y)$ und $O(x',y')$ in der Pseudogeometrie folgendermaassen:

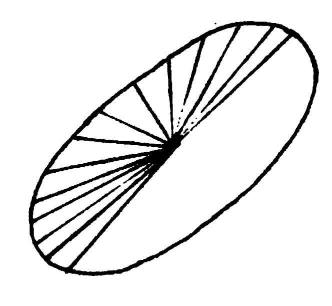
$$\varphi = \arccos \frac{axx' + \frac{b}{2}(xy'+x'y) + cyy'}{\sqrt{ax^2+bxy+cy^2}\,\sqrt{ax'^2+bx'y'+cy'^2}},$$

woraus sich noch als zweiter Ausdruck ergiebt:

$$\varphi = \arcsin \frac{(xy'-x'y)\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{ax^2+bxy+cy^2}\,\sqrt{ax'^2+bx'y'+cy'^2}}.$$

Zur Veranschaulichung wollen wir zusehen, was die Gleichheit zweier Winkel bedeutet. Wir wollen uns vom Mittelpunkte der Einheitsellipse eine Anzahl von Geraden zeichnen, welche im Sinne der Pseudogeometrie je gleiche Winkel mit einander bilden, also geradezu eine Winkelscala construiren. Die entstehenden Ellipsenvectoren sind dann im Sinne der Pseudogeometrie congruent, d. h. sie können

durch Pseudobewegung, hier durch blosse Drehung, zur Deckung gebracht werden. Im Sinne der gewöhnlichen Maassbestimmung sind sie immer noch <u>inhaltsgleich</u>. Denn die Pseudodrehungen machen einen gewissen Teil der



affinen Transformationen aus; sie haben ausserdem die Determinante 1, weil sie einen bestimmten Flächeninhalt, nämlich die Fläche der Einheitsellipse, in sich überführen. In Folge dessen bleibt bei unseren Drehungen nach Obigem auch im Sinne der gewöhnlichen Maassbestimmung der Flächeninhalt der Figuren invariant. Diese Bemerkung dient dem Auge als Anhalt, wenn wir, wie in der Figur, um O eine Winkelscala entwerfen wollen.

Hieran könnten wir noch weitere Bemerkungen über die anderen Operationen in der Gruppe unserer Pseudoge-

metrie, Ähnlichkeitstransformation und Spiegelung, anschliessen.

Diejenigen unter Ihnen, denen diese im Grunde sehr einfachen Begriffe ungewohnt sind, können sich dieselben vielleicht durch einen Vergleich mit der allgemeinen Flächentheorie näher bringen. Dort führt man bekanntlich als krummlinige Coordinaten eines Flächenpunktes irgend zwei Curvensysteme x und y ein und stellt das Linienelement, d. h. die Entfernung zweier benachbarter Punkte durch sie folgendermaassen dar:

$$ds = \sqrt{E\partial x^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2},$$

wo die E, F, G im Allgemeinen Functionen von x und y sein werden. Unsere Maassbestimmung in der Ebene nun, in welcher

$$ds = \sqrt{a\,dx^2 + b\,dx\,dy + c\,dy^2}$$

wird, erweist sich als ein spezieller Fall jener, indem nämlich bei uns E, F und G constante Grössen sind. In analytischer Hinsicht ordnet sich

unsere Maassbestimmung durchaus in die allgemeine Flächentheorie ein, nur die Auffassung ist in beiden Fällen eine verschiedene. In der Flächentheorie denken wir uns die Maassbestimmung der geometrischen Gestalt der Fläche entnommen; in unserem Falle dagegen tragen wir sie unsererseits durch einen Akt der Willkür in die Fläche herein. Das ist derselbe Gedanke, den wir, soweit die Ebene in Betracht kommt, schon oben berührten.

Eine bedeutende Vereinfachung erziehen wir dadurch, dass wir unsere quadratische Form f in zwei complexe Factoren spalten:

$$f(x,y) = \left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}\,y\right)\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}\,y\right)$$

und diesen Factoren einen geometrischen Sinn beilegen. Jeder dieser Factoren, gleich Null gesetzt, stellt eine gerade Linie dar, welche durch den einen oder anderen Grundpunkt auf der unendlich fernen Geraden hindurchgeht. Wir bezeichnen sie nach dem Vorgange von Lie als Minimallinien. Den Minimallinien kommen

im Sinne unserer Maassbestimmung die paradoxesten Eigenschaften zu: sie haben beispielsweise die Länge Null und stehen auf sich selbst rechtwinklig, wie aus unseren obigen Definitionen von Entfernung und Winkel hervorgeht.

Dass diese Linien imaginär sind, soll uns nicht davon abhalten, mit ihnen geometrisch zu operiren. Wir werden dieselben sogar zu Axen eines Coordinaten-Systems, des „Minimalcoordinaten-Systems" machen. Die Minimalcoordinaten ξ und η definiren wir als Parameter in den beiden Geradensystemen, welche der einen oder anderen Minimallinie parallel laufen, wir setzen einfach

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \sqrt{a}\,x + \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}\,y \\ \eta &= \sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}\,y \end{aligned}\right\} \text{ so dass } r = \sqrt{\xi\eta} \text{ wird}$$

Die Minimalcoordinaten sind gewöhnliche (nur imaginäre) Parallelcoordinaten. Einem reellen Punkte der Ebene x und y entsprechen 2 conjugirt

imaginäre Werte von ξ und η.

Die Minimallinien der gewöhnlichen Maassbestimmung sind die beiden Strahlen nach den Kreispunkten $x + iy = 0$ und $x - iy = 0$. Die Minimalcoordinaten sind hier einfach so zu definiren

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - iy \\ \eta &= x + iy \end{aligned}\right\}.$$

Überall da, wo man in der gewöhnlichen Geometrie der Ebene mit den complexen Aggregaten $x + iy$ und $x - iy$ rechnet, können wir demnach von Minimalcoordinaten reden. Der Nutzen der Minimalcoordinaten ist hiernach aus der Functionentheorie, aus der Mechanik etc. hinlänglich bekannt. Für unsere Zwecke liefern sie wesentliche Vereinfachungen. Wir stellen zunächst den Ausdruck für eine Drehung in Minimalcoordinaten her. Eine Drehung um O ist eine lineare Substitution in den x, y, also auch in den ξ, η. Nun bleiben bei der Drehung die Grundpunkte, also auch die Strahlen von O nach diesen, d. h. die Mi-

nimallinien ungeändert. Eine Drehung führt also $\xi = 0$ in $\xi' = 0$ über und $\eta = 0$ in $\eta' = 0$. Daher nimmt der Ausdruck für eine Drehung folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}\xi' &= m\,\xi\\ \eta' &= m'\,\eta\end{aligned}\right\}.$$

Berücksichtigen wir noch, dass die Determinante der Substitution gleich 1 und die Coefficienten conjugirt imaginär sein müssen, wenn anders die Drehung reelle Punkte in reelle überführen soll, so können wir die vorstehenden Gleichungen folgendermaassen schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\xi' &= e^{i\varphi}.\,\xi\\ \eta' &= e^{-i\varphi}.\,\eta\end{aligned}\right\}.$$

Die reelle Grösse φ bedeutet den Drehungswinkel im Sinne unserer Maassbestimmung. Aus den vorstehenden Gl. folgt nämlich durch Addition

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\frac{(\xi'\eta + \xi\eta')}{\xi\eta}$$

oder auch, da $\xi\eta = \xi'\eta' = r^2$:

$$\cos \zeta = \frac{1}{2} \frac{(\xi'\eta + \xi\eta')}{\sqrt{\xi\eta}\,\sqrt{\xi'\eta'}}$$

was mit der Winkeldefinition von pag 61 übereinstimmt, weil $\frac{\xi'\eta + \xi\eta'}{2}$ die Polare von $\xi\eta$ ist.

Viel eleganter aber können wir jetzt den Pseudowinkel im Anschluss an unsere Drehungssubstitution folgendermassen definiren:

Der Winkel der beiden Strahlen von O nach (ξ, η) und (ξ', η') ist gleich $\frac{1}{2}$ multiplicirt mit dem Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches die genannten Strahlen mit den Minimallinien bilden. Aus unseren Substitutionsformeln folgt nämlich durch Division die Gleichung:

$$\zeta = \frac{1}{2i} \lg\left(\frac{\xi'}{\eta'} : \frac{\xi}{\eta}\right),$$

welche die neue Winkeldefinition ergiebt. Dieselbe ist natürlich nur in der Form von der früheren verschieden, analytisch ist sie jener ganz gleichwertig.

Do. 21. Nov. 95. Zum Schlusse unserer Aus-

führungen über die elliptische Maassbestimmung müssen wir bemerken, dass wir uns alle diese Einzelheiten hätten ersparen können. Wir hätten nämlich mit Zuhilfenahme projectiver Begriffe einfach folgendermassen sagen können. Wir erhalten die elliptische Maassbestimmung in einer Ebene, wenn wir eine mit gewöhnlicher Maassbestimmung ausgestattete Ebene durch Parallelprojection auf jene beziehen und die Maassverhältnisse aus der Originalebene auf die entsprechenden Stücke der Bildebene übertragen. Wir haben nur dafür zu sorgen, dass die Kreispunkte bei der Projection übergehen in die Grundpunkte der elliptischen Maassbestimmung. Dabei wird beispielsweise aus dem System concentrischer Kreise um O in der Originalebene das System ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen in der Bildebene werden; eine gewöhnliche Winkelskala congruenter Teile verwandelt sich in die elliptische

°Winkelskala von pg. 62.

Die Sache liegt, kurz gesagt, so: Indem wir von einer elliptischen Maassbestimmung in der Bildebene sprechen, denken wir an die gewöhnliche Maassbestimmung in der Originalebene.

Zum Beweise dessen greifen wir auf unsere Formeln für Minimalcoordinaten zurück. Seien ξ, η die oben definirten Minimalcoordinaten der elliptischen Maassbestimmung, Ξ, H gewöhnliche Minimalcoordinaten in einer X, Y-Ebene, so dass

$$\Xi = X + iY, \quad H = X - iY$$

wird, dann führt die Substitution $\Xi = \xi$, $H = \eta$ die Grundpunkte der x, y-Ebene in die Kreispunkte der X, Y Ebene über und die elliptische Maassbestimmung verwandelt sich in die gewöhnliche. Ausführlicher schreibt sich jene Substitution folgendermassen:

$$X \pm iY = \sqrt{a}\, x + \frac{b \pm i\sqrt{4ac - b^2}\, y}{2\sqrt{a}}$$

oder

$$X = \sqrt{a}\, x + \frac{by}{2\sqrt{a}}$$

$$Y = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2\sqrt{a}}\, y.$$

Es ist aber aus der projectiven Geometrie bekannt, daß dieses die Gleichungen einer Parallelprojection der X Y – auf die xy Ebene sind. Eine mit elliptischer Maass-bestimmung ausgestattete X, Y – Ebene kann also durch Parallelprojection stets in eine X, Y – Ebene mit gewöhnlicher Maassbestimmung übergeführt werden.

2. Hyperbolischer Fall, $b^2 - 4ac > 0$.

Dieselbe Betrachtungsweise liesse sich auch auf den Fall der hyperbolischen Maass-bestimmung anwenden. Wir können die hyperbolische Ebene gleichfalls durch Parallelprojection in eine Ebene mit gewöhnlicher Maassbestimmung verwandeln, wobei der Übergang durch dieselben Transformationsgleichungen wie vorhin vermittelt wird. Diese Gleichungen enthalten jetzt aber in ihren Coefficienten die Quadratwurzel aus einer negativen Grösse. Die Projection wird daher jetzt eine imaginäre. Da aber die Verhältnisse bei einer imaginären Projection nicht ohne Weiteres anschaulich sind,

müssen wir die geometrische Bedeutung der hyperbolischen Maassbestimmung im Einzelnen durchgehen, und eben deshalb hatten wir als eine Vorübung das Gleiche vorhin bei der elliptischen Maassbestimmung gethan.

Den Abstand eines Punktes x, y von O definiren wir nach wie vor durch den Ausdruck

$$r = \sqrt{ax^2 + bxy + cy^2} = \sqrt{\xi \cdot \eta}$$

Für die Punkte gleichen Abstandes besteht die Gleichung $ax^2 + bxy + cy^2 = C$. In dem besonderen Falle $C = 0$ zerfällt die Curve gleichen Abstandes in 2 reelle gerade Linien $\xi = 0, \eta = 0$; es sind dieses die „<u>Minimallinien der hyperbolischen Maassbestimmung</u>", deren sämmtliche Punkte von O den Abstand Null besitzen. Die Minimallinien

zerlegen die Ebene in zwei Doppelvectoren. In dem einen Doppelvector haben ξ und η gleiches, in dem anderen entgegengesetzten Vorzeichen.

Ist C von Null verschieden, so besteht die Curve gleichen Abstandes aus einer Hyperbel, welche die Minimallinien zu Asymptoten hat. Dieselbe liegt in dem ersten oder zweiten Doppelvector, je nachdem $C > 0$ oder $C < 0$ ist. Die Punkte des ersten Sectors haben daher von O einen reellen, die des zweiten einen imaginären Abstand.

Unter dem Winkel (φ) zweier von O auslaufender Strahlen verstehen wir hier wie im vorigen Falle den mit $\frac{i}{2}$ multiplicirten Logarithmus desjenigen Doppelverhältnisses, welches jene Strahlen mit den Minimallinien bilden. Hinsichtlich der Realität des Winkels müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

a. Beide Geraden liegen in demselben Doppelsector. Dann besitzt das

genannte Doppelverhältnis einen positiven Wert; wir haben daher, unter ϱ eine reelle Grösse verstanden:

$$lg\, DV = \varrho \pm 2k\pi i$$

und

$$\varphi = \frac{i\varrho}{2} \mp k\pi.$$

Zwei Strahlen, welche demselben Sector angehören, bilden also mit einander, von Multiplis der Zahl π abgesehen, einen rein imaginären Winkel.

b. Beide Geraden liegen in verschiedenen Sectoren. Dann ist das Doppelverhältnis negativ; also

$$lg\, DV = \varrho \pm (2k+1)\pi i$$

und

$$\varphi = \frac{i\varrho}{2} \mp (k+\tfrac{1}{2})\pi.$$

Zwei Strahlen, welche durch die Minimalgeraden getrennt werden, liefern also einen Winkel, dessen reeller Bestandteil ein ungerades Vielfaches von $\pi/2$ ist. Die Minimallinien selbst bilden mit jeder Geraden einen unendlich grossen Winkel. Lassen wir nämlich einen der vorher betrachteten Strahlen in eine

der Minimallinien rücken, so wird das Doppelverhältnis 0 oder ∞. Der zugehörige Winkel ist also allemal unendlich gross.

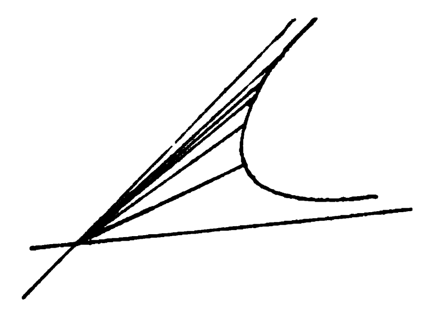
Wollen wir, was später bequem sein wird, den imaginären Winkel φ durch eine reelle Grösse ψ ausdrücken: $\varphi = i\psi$, so müssen wir natürlich auch den $\sin \varphi$ durch $\sin i\psi = sh(\psi)$ ersetzen. In den trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie sind also dann die trigonometrischen Functionen durch die sog. hyperbolischen zu ersetzen.

Durch die Minimalcoordinaten ξ und η drückt sich der Winkel wieder besonders einfach aus. Es wird nämlich

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\, lg \left(\frac{\xi}{\eta} : \frac{\eta'}{\xi'}\right)$$

Wollen wir nun auch eine <u>hyperbolische Winkelskala</u> construiren, so zeichnen wir uns zunächst die Einheitshyperbel $r^2 = 1$. Einen von 0 aus nach dieser verlaufenden

Radiusvector drehen wir nun fortgesetzt um den gleichen hyperbolisch gemessenen Winkel vorwärts, wobei der Endpunkt des Vectors auf der Hyperbel



fortgleitet. Die von dem Vector beschriebenen Flächen, welche im Sinne der hyperbolischen Maassbestimmung congruent sind, bleiben im Sinne der gewöhnlichen Maassbestimmung inhaltgleich. Danach ist die Figur der Winkelskala zu entwerfen.

Wenn wir solcher Weise den Radius Vector fortgesetzt um den gleichen Betrag weiter drehen, bringen wir ihn einer der Minimallinien immer näher, ohne sie jedoch jemals zu erreichen. Denn der Flächeninhalt, welcher von unserm Radius-Vector, der Einheitshyperbel und der Minimallinie eingeschlossen wird, ist unendlich gross.

Bei einer endlichen Anzahl endlicher Drehungen überstreichen wir aber mit unserem Radius-Vector nur eine endliche Fläche. Wir gelangen also, so oft wir auch drehen mögen, niemals bis in die Minimallinie hinein. Daraufhin verstehen wir auch, warum die Minimallinie mit jeder Geraden einen unendlich grossen Winkel bilden muss.

Der analytische Ausdruck für eine Drehung um O ergiebt sich aus der vorstehenden Gleichung für den Winkel zweier von O auslaufenden Geraden. Danach besteht zwischen einem Punkte $\xi'\eta'$ der um φ gedrehten Geraden und einem Punkte $\xi\eta$ der Geraden vor der Drehung die Relation:

$$\frac{\xi'}{\eta'} = e^{2i\varphi}\frac{\xi}{\eta} .$$

Spalten wir diese Gleichung so, dass $\xi\eta = \xi'\eta'$ wird, so erhalten wir die Coordinaten ξ', η' desjenigen Punktes, in den der Punkt ξ, η durch die Drehung übergeführt wird, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= e^{i\tau}.\xi \\ \eta' &= e^{-i\tau}.\eta \end{aligned}\right\}.$$

Hier ist $e^{i\tau}$ eine reelle Grösse. Wir schreiben daher lieber folgendermassen:

$$\xi'' = e^{-\psi}\cdot\xi = \rho\,\eta$$
$$\eta' = e^{+\psi}\cdot\xi = 1/\rho\,\eta\,.$$

Dieses sind die Gleichungen der Drehungssubstitution. Sie zeigen, dass die Drehung in der hyperbolischen Geometrie eine aperiodische, nicht wie in der gewöhnlichen oder elliptischen Geometrie eine periodische Operation ist.

Neben der Drehung betrachten wir die Operation der Spiegelung. Eine Spiegelung definiren wir als eine Drehung, verbunden mit einer Vertauschung von ξ und η. Die Transformationsgleichungen der Spiegelung werden also

$$\xi' = \rho\,\eta$$
$$\eta' = 1/\rho\,\xi\,.$$

Bei dieser Operation gibt es zwei gerade

Linien, welche ungeändert bleiben, nämlich die Linien

$$\frac{\xi}{\eta} = +\varrho \quad \text{und} \quad \frac{\xi}{\eta} = -\varrho.$$

Die erste dieser Linien geht bei der Spiegelung Punkt für Punkt in sich über. Wir haben nämlich unter m einen Proportionalitätsfaktor verstanden:

$$\begin{matrix} \xi = m\varrho \\ \eta = m \end{matrix} \quad \text{und daher} \quad \begin{matrix} \xi' = m\varrho = \xi \\ \eta' = \varrho = \eta \end{matrix}.$$

Die zweite Linie geht in der Weise in sich über, dass der Punkt ξ, η mit dem Punkte $-\xi, -\eta$ vertauscht wird. Zu den Minimalgeraden liegen diese beiden Linien harmonisch. Man überzeugt sich leicht, dass der so definirten Operation in der gewöhnlichen Geometrie die gewöhnliche Spiegelung, dass der ersten Linie die Spiegelungsaxe, der zweiten die dazu Senkrechte entspricht.

3. Parabolischer Fall. $b^2 - 4ac = 0$.

Im parabolischen Falle wird die Form $ax^2 + bxy + cy^2$ ein vollständiges Quadrat. Der Ausdruck für die Entfer-

nung wird daher hier linear in x und y

$$r = \pm (\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y) = \xi .$$

Die Minimallinien bestehen aus der doppelt zu zählenden Geraden $\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y = 0$. Die Entfernung eines Punktes p von o wird gleich seiner Entfernung ξ von der Minimallinie. Die Entfernung zweier Punkte p und p' von einander ist gleich $\xi - \xi'$. Schalten wir noch beliebige andere Punkte $p_1, \ldots, p_2$ ein, so wird jetzt die Entfernung p von p' gleich der Entfernung p von $p_1 + \ldots +$ der Entfernung p_2 von p', da

$$\xi - \xi' = \xi - \xi_1 + \xi_1 - \cdots + \xi_2 + \xi_2 - \xi' .$$

Wir kommen also zu dem paradoxen Resultat, daſs die Weglänge zwischen 2 Punkten in der parabolischen Maaſsbestimmung unabhängig wird von dem zurückgelegten Wege und nur von der Lage des Anfangs- und Endpunktes abhängt. (Das Bogenelement ds erscheint als ein vollständiges Differential).

Wollen wir den Winkel zweier in O zusammenlaufenden Geraden berechnen, so müssen wir die zusammenfallenden Minimallinien des parabolischen Falles als Grenzfall zweier nicht zusammenfallender Linien auffassen. Seien daher die Minimallinien zunächst

$$\xi = 0 \quad \text{und} \; \eta = \xi + \varepsilon\zeta = 0.$$

Den Winkel definiren wir dann wie früher durch:

$$i/2 \lg\left(\frac{\xi}{\xi+\varepsilon\zeta} \cdot \frac{\xi' + \varepsilon\zeta'}{\xi'}\right),$$

wo nun ε eine zu Null abnehmende Grösse bedeutet. Wollen wir zu einer vernünftigen Winkeldefinition kommen, so müssen wir eine mit ε variable Maasseinheit einführen. Wir schreiben daher:

$$C\left\{\lg\left(1+\varepsilon\frac{\zeta'}{\xi'}\right) - \lg\left(1+\varepsilon\frac{\zeta}{\xi}\right)\right\} = C\varepsilon\left(\frac{\zeta'}{\xi'} - \frac{\zeta}{\xi}\right) + \cdots$$

und setzen fest, dass $C\varepsilon$ gleich einer festen Grösse k sei. Unter dem Winkel verstehen wir daher hier die Grösse

$$k\left(\frac{\zeta'}{\xi'} - \frac{\zeta}{\xi}\right),$$

in welcher ξ und η den Abstand von der Minimallinie $\xi = 0$ und von einer Hülfsgeraden $\eta = 0$ bedeutet. Der Winkel wird jetzt eine algebraische Function der Coordinaten, während er früher eine transcendente war. —

Freit. d. 22. XI. Wir kehren nunmehr zur Zahlentheorie zurück und machen uns zunächst in arithmetischer Formulirung mit dem fundamentalen Problem aus der Theorie der binären quadratischen Formen, mit dem wir uns hier in erster Linie ausführlich beschäftigen müssen, dem „Äquivalenzproblem" bekannt. Es handelt sich um Folgendes: Gegeben seien zwei Formen

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$
$$f' = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2,$$

in welchen wir unter $x, y, \ldots$ ganze Zahlen verstehen wollen, während wir die Coefficienten $a, b, c \ldots$ nicht ausschliesslich als ganzzahlig voraussetzen werden. Können diese Formen durch eine Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

mit reellen ganzzahligen Coefficienten von der Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

in einander übergeführt werden? Wenn dieses der Fall ist, nennen wir die Formen f und f' aequivalent u. zw. eigentlich oder uneigentlich aequivalent, je nachdem die Determinante der Substitution $+1$ oder -1 ist.

Eine Vorbedingung für die Aequivalenz beider Formen leiten wir aus der Betrachtung der Ausdrücke $b^2 - 4ac$ bez. $b'^2 - 4a'c'$ her. Ihr Vorzeichen entscheidet bekanntlich über die Realität der Wurzeln von $f = 0$ bez. $f' = 0$; sie werden daher als Discriminanten bezeichnet. Nun ändert aber unsere reelle Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ an der Realität der Wurzeln nichts. Sollen daher die Formen f und f' bei der Substitution identisch werden, so müssen sie von vornherein in dem Vorzeichen ihrer

Discriminanten übereinstimmen. Beide Formen gehören daher, falls sie aequivalent sind, gleichzeitig zu dem elliptischen parabolischen oder hyperbolischen Falle.

Die Invariantentheorie belehrt uns darüber hinaus, dass die Discriminante einer Form eine invariante Bildung ist, dass sie sich also bei einer linearen Substitution nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante ändert. Verstehen wir unter A, B, C die Coefficienten der transformirten Form, so wird nämlich

$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

In unserem Falle ($\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$) bleibt also die Discriminante völlig ungeändert.

Die Gleichheit der Discriminanten von f und f': $b^2 - 4ac = b'^2 - 4a'c' = D$ ist daher jedenfalls eine nothwendige Bedingung für ihre Aequivalenz.

Damit ist aber die Frage noch lange nicht entschieden. Der Inhalt der fol-

genden Theorie ist es gerade, die feineren Kriterien anzugeben, welche ausserdem für die Aequivalenz erforderlich sind. Wir übertragen die Frage sogleich in's Geometrische. Wir ziehen uns zur Versinnlichung der Form f ein Gitter und betrachten dieses im Sinne der durch $f(x, y)$ indicirten Maassbestimmung. Um letzteres anzudeuten, zeichnen wir in das Gitter unsern Einheitskegelschnitt hinein, welcher nach Umständen eine Ellipse, Hyperbel oder ein Linienpaar sein kann. Das Gitter repräsentirt uns gewissermassen den variablen Bestandtheil unserer Form f, nämlich die Paare ganzer Zahlen x und y, der Kegelschnitt den festen Bestandtheil, nämlich die Coefficienten a, b, c. Von dem Gitter kommen bei der sogleich zu nennenden affinen

Transformation nur die Gitterpunkte, nicht die Gitterstäbe in Betracht. Wir meinen im Folgenden daher nicht ein Parallel - sondern nur, ein Punktgitter.

Ein zweites gleichfalls mit einem Kegelschnitt versehenes Gitter stellt unsere zweite Form f' dar. Die Frage ist nun einfach: Sind die beiden so entstehenden Figuren affin verwandt, d. h. kann durch dieselbe affine Transformation erreicht werden, dass die Gitter und gleichzeitig die Kegelschnitte beider Figuren zur Deckung kommen.

Von vornherein ist klar, dass jedes Gitter in jedes andere und ebenso, dass jeder Kegelschnitt in jeden anderen durch affine Transformation verwandelt werden kann. Indem wir das eine oder andere an unseren Figuren vorweg thun oder nicht thun, können wir unsere Frage geometrisch in 3 verschiedene Formulirungen bringen.

I. Gegeben 2 Gitter und 2 Kegelschnit

te. Giebt es eine affine Transformation, welche Gitter in Gitter und gleichzeitig Kegelschnitt in Kegelschnitt überführt.?

II. Gegeben ein Gitter und 2 Kegelschnitte. Gesucht eine affine Transformation, welche das Gitter ungeändert lässt und den einen Kegelschnitt in den anderen überführt.

III. Gegeben 2 Gitter und ein Kegelschnitt. Es handelt sich darum durch eine affine Transformation, welche den Kegelschnitt (und natürlich seinen Mittelpunkt O) ungeändert lässt, das eine Gitter in das andere zu verwandeln. Eine solche Transformation ist aber im Sinne der durch den Kegelschnitt repräsentirten Maassbestimmung eine Bewegung; sie ist genauer gesagt, eine Drehung, wenn sie die Determinante +1, eine Spiegelung, wenn sie die Determinante −1 hat. Im Falle der „Aequivalenz" müssen also unsere 2 Gitter bei dieser Art

der Fragestellung im Sinne der betr. Maassbestimmung <u>congruent sein</u>, u. zw. entweder direct oder spiegelbildlich congruent. Wir sehen uns also eigenthümlicher Weise hier in der Zahlentheorie vor dieselbe Frage geführt, mit welcher die elementare Geometrie anhebt, nämlich vor diese: <u>wann sind zwei Figuren congruent</u>?

Die verschiedenen Richtungen, in denen wir das vorliegende Problem unter I, II und III in Ansatz bringen, entsprechen genau den allgemeinen Formulirungen in S. 1, 2 meines Erlanger Programms. Es war mir damals nur nicht bekannt, daß eben jene Ideen auch in der Zahlentheorie fruchtbar sein könnten. Wenn man von der üblichen, algebraischen Geometrie ausgeht, so kommt man leicht dazu, als einziges Object der geometrischen Untersuchung die continuirlichen Curven anzusehen oder doch nur solche Gebilde, welche aus einer <u>endlichen</u> Zahl discreter Bestandtheile

bestehen. Ein ebenso interessantes Forschungsgebiet für den Geometer bilden aber ersichtlich auch Gebilde aus unendlich vielen discreten Bestandteilen wie unser Punktgitter. Sobald man nur diese mit berücksichtigt, erlangen die Begriffsbildungen der Geometrie sofort auch in der Arithmetik ihre Bedeutung, es verschwindet überhaupt der specifische Gegensatz zwischen beiden Gebieten.

Da die III. Formulirung des Aequivalenzproblemes eine besonders anschauliche war, werden wir im Folgenden diese vor den anderen bevorzugen. Wir wollen zusehen, wie in diesem Falle die Elementarfigur des Coordinatensystems gestaltet ist, wie wir also den Einheitsvector der x und y - Axe zu wählen haben, damit der gerade hingezeichnete Kegelschnitt die Gleichung

$$f = ax^2 + bxy + cy^2 = 1.$$

bekommt. Dem Punkte $x = 1, y = 0$ entspricht als Entfernung von 0.

$$r = \sqrt{a},$$

dem Punkte $x = 0, y = 1$ ebenso:

$$r = \sqrt{c};$$

der Winkel der beiden Einheitsvectoren ferner wird nach pg. 61. gegeben durch

$$\cos\varphi = \frac{b}{2\sqrt{ac}}.$$

Alle 3 Grössen sind natürlich im Sinne der durch den hingezeichneten Kegelschnitt gegebenen Maassbestimmung zu verstehen; durch Angabe dieser 3 Grössen ist das Gitter bis auf das willkürlich zu wählende Azimuth des x-Vectors festgelegt.

Der Inhalt des Elementarparallelogramms berechnet sich in unserer Maassbestimmung ebenso wie in der gewöhnlichen durch die Formel.

$$\sqrt{ac}\,\sin\varphi = \sqrt{\frac{4ac - b^2}{2}} = \sqrt{\frac{-D}{2}}$$

Sollen unsere beiden zu f und f' gehörigen Gitter im Sinne des Ansatzes

III durch Bewegung zur Deckung gebracht werden können, so müssen sie von vornherein jedenfalls flächengleiche Elementarparallelogramme haben; denn ihr Inhalt bleibt bei der Bewegung und andererseits bei beliebig geänderter Auswahl des Elementarparallelogramms ungeändert. Die Gleichheit von D, welche wir bereits oben auf Grund der Invariantennatur der Discriminante constatirten, erweist sich hiernach auch geometrisch als eine notwendige Vorbedingung für die Möglichkeit der „Äquivalenz".

Specielle und in der Litteratur vorkommende Fälle unserer Kegelschnitt-Gitter-Figur sind diese:

Im elliptischen Falle, wir legen statt der Ellipse einen Kreis zu Grunde, dann bedeuten $\sqrt{a}$, $\sqrt{c}$ und $\frac{b}{2\sqrt{ac}}$ Seitenlängen und Winkelgrössen der Elementarfigur in gewöhnlicher Maassbestimmung. Lassen wir dann noch den Kreis als etwas Selbstverständliches weg, indem wir momentan von

der Möglichkeit einer Pseudomaass bestimmung absehen, so erhalten wir diejenige Gitterfigur, welche bereits bei Gauss 1831 in seiner Besprechung eines Buches von Sieber (Vergl. Werke Bd. II) vorkommt und welche den Ausgangspunkt für alle späteren arithmetisch-geometrischen Untersuchungen bildet.

Im hyperbolischen Falle; wir mögen hier etwa die Einheits-Hyperbel als gleichseitig annehmen. Die so entstehende Figur: gleichseitige Hyperbel mit eingezeichnetem Gitter: findet sich bei Selling (Vergl. Crelle Bd. 77, 1874), allerdings in wesentlich anderer Gedankenverbindung.

Freit. d. 29. XI. Wir haben nun das Aequivalenzproblem im elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Falle zu studiren, wo die Verhältnisse jedesmal sehr verschieden liegen. Allen drei Fällen gemeinsam ist nur dieses, dass sich die Untersuchung wesentlich auf die Umrisspolygone, oder, wie man es gewöhnlich arithmetisch ausdrückt, auf die

Kettenbruchentwickelung stützt. Da der parabolische Fall meistenteils vernachlässigt wird, wollen wir gerade mit diesem beginnen und nachher auf den hyperbolischen und elliptischen Fall kommen, (indem wir also auch hier die gewöhnliche Reihenfolge umkehren).

2. Das Äquivalenzproblem im parabolischen Falle.

Die parabolische Entfernung war

$$r = \sqrt{f} = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y.$$

Bei der Construction der (zusammenfallenden) Fundamentalstrahlen

$$\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y = 0$$

ergibt sich eine wesentliche Fallunterscheidung, jenachdem <u>$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ commensurabel oder incommensurabel</u> sind. Im ersten Falle gibt es auf der Fundamentallinie unendlich viele im zweiten Falle gar keine Gitterpunkte (ausser 0).
Die Frage nach der Aequivalenz zweier Formen wird nun allemal so beantwortet, dass man die gegebenen Formen in eine gewisse, eindeutig definirte Normalform bringt oder wie man

es in der Zahlentheorie seit Lagrange ausdrückt, dass man zu den gegebenen Formen reducirte Formen construirt. Je nachdem diese übereinstimmen oder nicht, sind die gegebenen Formen äquivalent oder nicht. Diese Methode ist Ihnen von der Geometrie her durchaus geläufig. Wenn sie z. B. entscheiden wollen, ob zwei analytisch gegebene Kegelschnitte geometrisch identisch sind, können Sie doch so verfahren, dass Sie beide Kegelschnitte etwa auf die Hauptaxen transformiren. Sind die transformirten Gleichungen identisch, so waren es die Kegelschnitte auch vor der Transformation; sind sie verschieden, so sind auch die Kegelschnitte gewiss verschieden.

1ter Fall. Wenn A und B commensurabel sind, so ist die Herstellung einer Normalform sehr leicht. Wir können dann nämlich den Ausdruck für r folgendermassen schreiben:

$$r = m(\alpha x + \beta y),$$

wo α und β teilerfremde ganze Zahlen,

m eine geeignete rationale Zahl ist. Zu den Zahlen α und β wissen wir zwei andere Zahlen γ und δ zu finden von der Beschaffenheit, dass

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1$$

wird. Machen wir nun die affine Transformation

$$X=\alpha x+\beta y, \qquad \alpha\delta-\beta\gamma=1,$$
$$Y=\gamma x+\delta y,$$

so ergiebt sich als reducirte Form die folgende:

$$r=mX.$$

Sei ferner eine zweite parabolische Form f' gegeben, für welche

$$r'=\sqrt{f'}=A'x'+B'y'.$$

Durch eine neue Transformation $\begin{pmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$ bringen wir auch r' in die Form

$$r'=m'X.$$

Das Resultat dieser Betrachtung ist folgendes:

Zwei parabolische Formen f und f' sind dann und nur dann aequivalent, wenn ihre Multiplicatoren m und m' übereinstimmen.

Die Kettenbrüche (Umrisspolygone)

kamen hierbei nur insofern zur Geltung, als wir mit der diophantischen Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ zu thun hatten.

<u>2ter Fall.</u> Wenn A und B incommensurabel sind, so schreiben wir den Ausdruck für r folgendermassen:

$$r = A(x - \omega y),$$

wo $\omega = -\frac{B}{A}$ eine irrationale Zahl ist. Eine zweite Linearform sei

$$r' = A'(x' - \omega' y').$$

Sollen r und r' aequivalent sein, so müssen jedenfalls auch die zugehörigen Werte von ω und ω' untereinander durch eine lineare Transformation $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ zusammen hängen, auch diese müssen, wie wir kurz sagen, aequivalent sein. Eine notwendige Bedingung für die Aequivalenz beider Formen ist daher die Gleichung:

$$\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

Im vorhergehenden Falle commensurabler A, B ist dieser Ansatz von Hause aus möglich und eben darum gar nicht zur Sprache gekommen.

Um zu entscheiden, ob diese Bedingung erfüllt ist, markiren wir uns in der x, y Ebene sowohl wie in der x' y' Ebene die Gitter der ganzzahligen Punkte und legen durch sie die beiden ω-Linien hindurch

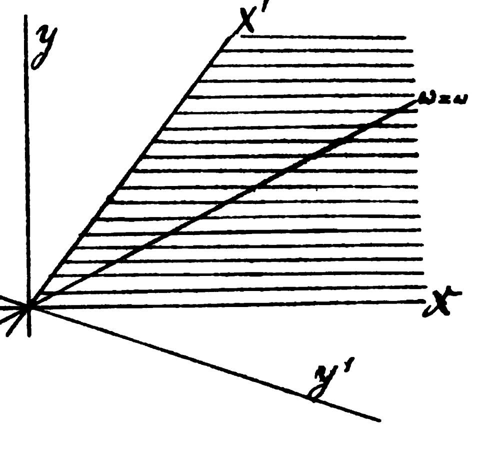
$$x - \omega y = 0 \text{ und } x' - \omega' y' = 0$$

y'
x' − ω'y' = 0.
x'
Fig. 2

Die Frage ist nun: können diese beiden Figuren durch Parallelprojection zur Deckung gebracht werden? Dabei kommt es lediglich darauf an, die Punktgitter und die ω-Linien in einander überzuführen; die Coordinatenaxen, welche nichts mit der Aequivalenzfrage zu thun haben, dürfen auch nach der Transformation verschieden sein.

y
x − ωy = 0
x
Fig. 1

Nehmen wir an, es sei uns diese Überführung gelungen. Dann entsteht eine „Doppelfigur" mit vereinigt gelegenen ω-Linien und Punktgittern, bei welcher wir noch 4 verschiedene Möglichkeiten unterscheiden können, je nachdem die positive x'-Axe oder die positive y'-Axe in das Innere des ersten Quadranten der xy Ebene zu liegen kommt, oder nicht. Gleichviel welcher von diesen Fällen vorliegen möge, so giebt es jedenfalls ein Gebiet, welches gleichzeitig dem positiven x, y-Quadranten und dem positiven $x'\,y'$-Quadranten angehört. In der ersten Figur ist es beispielsweise der



von der x'- und y'-Axe, in der zweiten

der von der x'- und x''- Axe eingeschlossene schraffirte Sector.

Nun construiren wir im ersten Quadranten der x, y - Ebene und im ersten Quadranten der x', y' - Ebene die Umrisspolygone (vergl. die Figuren der Seite 97), welche die w - Linie und die w' Linie umgeben. Dieselben sind, wie wir wissen, durch die Lage dieser Linien im Punktgitter völlig bestimmt. In unserer Doppelfigur, wo die w - Linien und die Punktgitter zusammenfallen, werden daher auch die Umrisspolygone identisch, <u>soweit sie im schraffirten Gebiete liegen.</u>

Diese Thatsache haben wir jetzt in's Arithmetische zu übersetzen, indem wir an die zu den Umrisspolygonen gehörigen Kettenbruchentwickelungen denken. Die Teilnenner $\mu_1, \mu_3, \mu_5 \ldots \mu_2, \mu_4, \mu_6 \ldots$ des Kettenbruchs haben in der Figur des Umrisspolygons ihre bestimmte Bedeutung. Wenn also, wie wir sahen, die Umrisspolygone von w und w'

von einer gewissen Stelle ab zusammenfallen, so müssen auch die Teilnenner in den beiderseitigen Kettenbruchentwickelungen von einer gewissen Stelle ab ihrer Grösse und ihrer Aufeinanderfolge nach übereinstimmen. Wir kommen daher zu dem folgenden Resultat:

<u>Sollen zwei irrationale Grössen ω und ω' aequivalent sein, so ist dazu jedenfalls erforderlich, daß ihre Kettenbrüche von einer bestimmten Stelle ab identisch werden.</u>

Man erkennt aber auch leicht, daß diese Bedingung hinreichend ist. Es seien nämlich die Kettenbruchentwickelungen

$$\omega = \mu_1 + \frac{1}{\mu_2} + \cdots + \frac{1}{\mu_\nu} + \frac{1}{\Omega}, \quad \omega' = \mu'_1 + \frac{1}{\mu'_2} + \cdots + \frac{1}{\mu'_{\nu'}} + \frac{1}{\Omega'};$$

dann haben wir, wie früher (pag 10), die Bezeichnung:

$$\omega = \frac{p_\nu \Omega + p_{\nu-1}}{q_\nu \Omega + q_{\nu-1}}, \quad p_\nu q_{\nu-1} - q_\nu p_{\nu-1} = (-1)^\nu$$

Diese Gleichung besagt, dass ω und Ω

aequivalent sind. Ebenso sind auch ω und Ω' aequivalent. Setzen wir nun voraus, dass die Kettenbrüche von einer gewissen Grenze ab übereinstimmen, dass etwa $\Omega = \Omega'$ wird, so folgt daraus sofort, dass ω und ω' unter einander aequivalent sind. Die Determinante der affinen Substitution $\omega = S(\omega')$ ist dabei gleich dem Producte aus den Determinanten der Substitutionen $\omega = S_1(\Omega)$ und $\omega' = S_2(\Omega')$; sie ist also gleich $(-1)^{r+r'}$. Danach sind ω und ω' eigentlich aequivalent, wenn r und r' gleichzeitig gerade oder ungerade sind; sie sind uneigentlich aequivalent, wenn eine der Zahlen r und r' gerade, die andere ungerade ist. Ersteres findet in Figur 1 von pg. 98. statt. Wenn hier nämlich der erste Eckpunkt der Polygonzüge, welcher in das schraffirte Gebiet fällt, rechts von ω liegt, so sind r und r' beide gerade; wenn er links von ω fällt, so sind r und r' beide ungerade.

Letzteres findet in Figur 2 statt. Denn hier gehört zu dem ersten Eckpunkt, welcher in das schraffirte Gebiet fällt, ein gerades r und ein ungerades r' oder ein ungerades r und ein gerades r'! Allgemein werden ω und ω' eigentlich oder uneigentlich aequivalent werden, je nachdem der Sinn, in dem die Geraden x, ω, y und die Geraden x', ω', y' auf einander folgen, der gleiche oder der entgegengesetzte ist.

Wir haben schliesslich anzugeben, welche weitere Bedingung zu der Äquivalenz der Zahlen ω und ω' hinzukommen muss, damit auch die Linearformen z und z' aequivalent werden. Durch Umkehrung der Substitution $\omega = S(\Lambda)$ von pg. 101 ergibt sich

$$\Lambda = -\frac{\omega q_{r-1} - p_{r-1}}{\omega q_r - p_r}$$

oder wegen der ursprünglichen Bedeutung von ω

$$\Lambda = -\frac{A p_{r-1} + B q_{r-1}}{A p_r + B q_r}$$

Ebenso wird

$$\Lambda' = -\frac{A' p'_{r'-1} + B' q'_{r'-1}}{A' p'_{r'} + B' q'_{r'}}$$

Ist nun $\Lambda = \Lambda'$, so können wir zunächst nur schliessen

$$\frac{A p_{r-1} + B q_{r-1}}{A p_r + B q_r} = \frac{A' p'_{r'-1} + B' q'_{r'-1}}{A' p'_{r'} + B' q'_{r'}}.$$

Die Nenner dieses Ausdruckes bedeuten die Werte der Linearformen r und r' im Punkte (r). Sollen die Formen aequivalent sein, so müssen diese Werte übereinstimmen. Stimmen aber die Nenner (oder die Zähler) jenes Ausdruckes überein, so folgt auch für alle folgenden Näherungspunkte die Gleichheit von r und r'

Wir erkennen daraus: <u>Sind w und w' aequivalent so sind es auch die Linearformen r und r', vorausgesetzt, daß sie in einem der zugehörigen gemeinsamen Näherungspunkte denselben Wert haben.</u>

3. Das Äquivalenzproblem im hyperbolischen Falle.

Wir betrachten eine Form vom hyper-

bolischen Typus

$f = ax^2 + bxy + cy^2$, wo $b^2 - 4ac > 0$.

Die Coefficienten a, b, c lassen wir zunächst beliebig, wir werden dann später um so besser verstehen, welche besonderen Verhältnisse im ganzzahligen Falle statt haben.

Die Wurzeln der Gleichung $f = 0$ liefern uns die Fundamentalstrahlen $x/y = \omega_1$ und $x/y = \omega_2$. Von den drei Fällen, welche hier zu unterscheiden wären: beide Zahlen ω_1, ω_2 rational, – eine Zahl rational, die andere irrational, – beide Zahlen irrational, wollen wir nur den letzten berücksichtigen. Übrigens scheidet, wenn die Coefficienten ganzzahlig sind, der zweite Fall von selbst aus, während sich der dritte Fall dahin specialisirt, daß die beiden irrationalen Zahlen conjugirte Irrationalitäten werden.

Eine zweite Form sei:

$f' = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$;

dieselbe liefere gleich Null gesetzt die beiden Wurzeln ω'_1 und ω'_2.

Wir construiren uns in der x, y - und in der x', y' - Ebene die Linien ω_1, ω_2 und ω'_1, ω'_2 und markiren ausserdem die Punktgitter. Sollen die so entstehenden Figuren affin verwandt sein, so müssen ausser den Punktgittern auch die ω - Geraden paarweise in einander übergehen. Es müssen also Gleichungen der folgenden Art bestehen:

$$\omega_1 = \frac{\alpha\omega'_1 + \beta}{\gamma\omega'_1 + \delta}$$

$$\omega_2 = \frac{\alpha\omega'_2 + \beta}{\gamma\omega'_2 + \delta}$$

Eine solche Gleichung zwischen zwei Grössen ω besteht, wie wir im vorigen Falle sahen, dann, wenn die Kettenbruchentwickelungen von einer gewissen Stelle ab übereinstimmen. Vorausgesetzt, dass dieses bei den Paaren ω_1, ω'_1 und ω_2, ω'_2 einzeln statt hat, so können die Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, durch welche die beiden ω zusammenhängen, noch verschieden ausfallen. Für die vorliegende Frage aber müssen wir den letztgenannten Gleichungen ent=

sprechend, verlangen, dass die beiden ω-Linien nebst den Punktgittern durch ein und dieselbe affine Transformation in einander übergehen. Wir sind daher auf ein neues Hülfsmittel angewiesen, das uns die Kettenbruchentwickelungen von ω_1 und ω_2 (bez. von ω_1' und ω_2') in Verbindung setzt.

Da bemerken wir, dass die Abgrenzung des Punkthaufens im parabolischen Falle durch die ω-Linie einerseits und durch eine Coordinatenaxe andererseits nur eine künstliche war, welche nicht aus dem Wesen unserer Figuren hervorging. Im hyperbolischen Falle, wo wir zwei ω-Linien haben, liefern uns diese selbst eine natürliche Begrenzung. Wir werden unsere Umrisspolygone daher jetzt ohne Rücksicht auf die Coordinatenaxen construiren können und einfach alle diejenigen Gitterpunkte durch ein Umrisspolygon eingrenzen, welche einem der vier durch die ω-Linien gebildeten Quadranten angehören. So bekommen wir vier natürliche Umrisspolygone, welche sich beiderseitig in's Un-

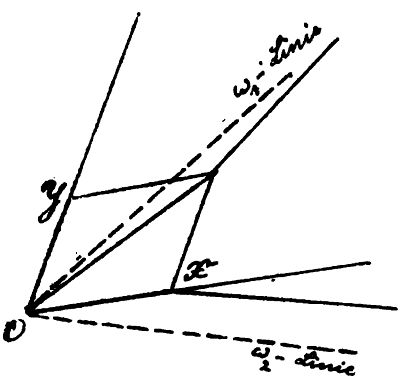
endliche erstrecken und übrigens paar-weise einander gleich werden. Solche Umrisspolygone haben wir in der x', y- und in der x'', y'-Ebene. Sollen die Figuren der beiden Ebenen affin verwandt sein, so müssen diese natürlichen Umrisspolygone in einander projicirt werden können.

Do. d. 5. XII. Wir beschäftigen uns im Folgenden mit dem geometrischen Studium der natürlichen Umrisspolygone, wobei wir bequemer Weise an die bereits untersuchten Eigenschaften der Kettenbruchpolygone anknüpfen werden. Da von den 4 Polygonen je zwei mit einander congruent sind, brauchen wir nur von 2 Polygonen zu sprechen (die wir vorübergehend P und P' nennen)

Wir beginnen damit, ein für unsere Betrachtung geeignetes Coordinatensystem zu definiren. Wir wählen als Einheitsvector der x-Axe die Strecke von O nach irgend einem Gitterpunkte auf einem der beiden Umrisspolygone (sagen wir auf P). Schreiten wir

von diesem Punkte aus längs einer Polygonseite von P' fort, so kommen wir auf dieser sicher noch zu einem zweiten Gitterpunkte.

Zur Verbindungsstrecke von jenem nach diesem Gitterpunkte ziehen wir durch O eine Parallelstrecke. Der Endpunkt der letzteren



fällt gleichfalls auf einen Gitterpunkt, u. zw. auf einen Gitterpunkt des Umrisspolygones P'. Diese Parallelstrecke wählen wir als Einheitsvector der y-Coordinate. Es zeigt sich, daſs das von diesen Einheitsvectoren bestimmte Parallelogramm in seinem Innern keinen Gitterpunkt enthalten kann. Für die eine (in der Figur schraffirte) Hälfte des Parallelogramms ist dieses nach den Eigenschaften der Umrisspolygone evident. Wegen der Symmetrie der Gitterfigur kann dann aber auch die andere (nicht schraffirte) Hälfte einen

Gitterpunkt in ihrem Innern nicht enthalten. Das so definirte Coordinatensystem besitzt daher ein Elementarparallelogramm vom Flächeninhalte 1; es ist ein Elementarcoordinatensystem. Ausserdem besitzt es die für das folgende wesentliche Eigenschaft, dass seine Axen durch die w- Linien der indefiniten Form getrennt werden. Da nämlich der x- Vector auf dem einen, der y- Vector auf dem anderen Umrisspolygon der w- Linien endigt, so liegt die eine Fundamentallinie (sagen wir w_1) im ersten, die andere (w_2) im zweiten Quadranten des x, y- Systems. Sind die Gleichungen der beiden Geraden in unserem Coordinatensystem

$$\frac{x}{y} = \lambda_1 \text{ und } \frac{x}{y} = \lambda_2$$

so haben in Folge dessen λ_1 und λ_2 verschiedene Vorzeichen. Jedes Coordinatensystem, für welches dieses zutrifft, nennen wir ein <u>reducirtes</u> Coor-

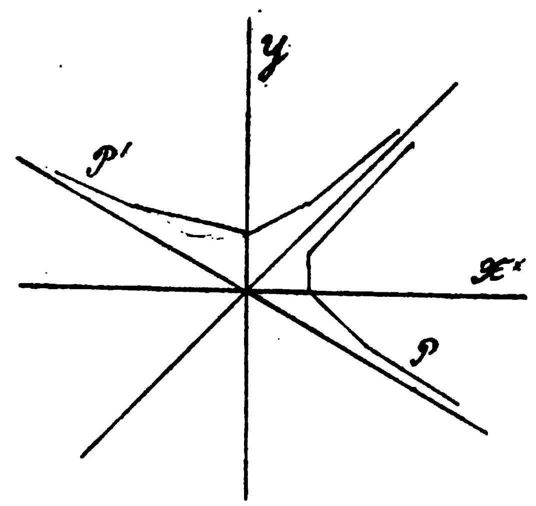
dinatensystem, desgleichen bezeichnen wir unsere hyperbolische Form, nachdem wir sie auf ein solches Coordinatensystem transformirt haben, als reducirte Form. Ist

$$F = AX'^2 + B'X'Y + CY^2$$

eine reducirte Form, so folgt aus dem ungleichen Vorzeichen der Wurzeln von $F = 0$ unmittelbar, daß die Coefficienten A und C ihrerseits ungleiches Vorzeichen besitzen. Umgekehrt hat auch jede indefinite Form in welcher A und C verschiedenes Vorzeichen haben, zwei Wurzeln von entgegengesetztem Zeichen. Wir können daher die Definition der reducirten Formen hier kurz folgendermassen fassen: <u>Eine reducirte Form ist eine solche, für welche $AC < 0$ ist.</u>

Die Beziehung zwischen den natürlichen Umrisspolygonen und den Polygonzügen der zu den Fundamentallinien gehörigen Kettenbruchentwickelungen gestaltet sich in einem reducirten Coordinatensystem besonders einfach. Entwickeln wir nämlich Λ_1 in einen Kettenbruch, so erhalten wir zwei Polygonzüge, welche nach der früher gegebenen

in dependenten geometrischen Construction jener Polygonzüge notwendiger Weise Teile unserer natürlichen Umrisspolygone P und P' sind. Es sind nämlich die im ersten Quadranten des X', Y-Systems gelegenen Stücke von P und P'. Entwickeln wir ferner Λ_2 in einen Kettenbruch, so sind zu-



gehörigen Polygonzüge dieses Kettenbruchs die übrig bleibenden Teile der natürlichen Umrisspolygone, nämlich die im 2ten und 4ten Quadranten gelegenen Stücke von P und P'. <u>In einem reducirten Coordinatensystem setzen sich also die natürlichen Umrisspolygone aus den Kettenbruchpolygonen der Wurzeln Λ_1 und Λ_2 direct zusammen.</u> Bei

einem nicht reducirten Coordinatensystem dagegen liegen die Verhältnisse nicht ganz so einfach

Daraufhin übertragen sich die Eigenschaften der Kettenbruchpolygone von Λ_1 und Λ_2 ohne Weiteres auf die natürlichen Umrisspolygone. Wir haben die folgenden Punkte hervor:

1. <u>Zu jeder Seite des einen Polygonzuges (P) gehört eine bestimmte Ecke des anderen (P').</u> Wir haben nämlich bei der Construction der Kettenbrüche die Seite (r-1)(r+1) dadurch erhalten, dass wir durch (r-1) eine Parallele zu dem Vector O (r) zogen. Der Punkt (r) ist daher der Seite (r-1)-(r+1) eindeutig zugeordnet, wir bezeichnen ihn als den jener Seite „<u>gegenüberliegenden</u>" Eckpunkt.

2. Die Seite (r-1)-(r+1) braucht dabei nicht gerade die Länge des Vectors O (r) zu besitzen. Sie konnte auch ein ganzzahliges, (a-faches) Multiplum jenes Vectors sein. In dieser Weise gehörte zu jeder Seite der Kettenbruchpolygone eine ganze Zahl a, welche gleich der um 1 vermehrten

Anzahl der Nebenpunkte im Innern der Seite war. Dementsprechend gehört auch zu jeder Seite unserer natürlichen Umrisspolygone eine ganze Zahl μ. Wir versehen diese Zahlen in der Weise mit Indices, dass sich die Zahlen μ_ν mit ungeradem Index auf die Seiten von P die mit geradem Index auf die Seiten von P' beziehen. Dadurch bekommen wir zwei Reihen beiderseitig in's Unendliche verlaufender ganzer Zahlen, welche so wie die Reihen der geraden und ungeraden Zahlen in ihrer natürlichen Folge geordnet sind:

$$\ldots \mu_{-3}, \; \mu_{-1}, \; \mu_1, \; \mu_3, \ldots$$
$$\ldots, \mu_{-2}, \; \mu_0, \; \mu_2, \; \mu_4, \ldots$$

3. Wir können diese Zahlenreihen an sich ganz beliebig annehmen und dadurch die Lage der Geraden willkürlich Λ_1 und Λ_2 festlegen. In der That setzen sich aus jeder solchen Zahlenreihe zwei Kettenbrüche zusammen, durch welche immer ein und nur ein Wertepaar Λ_1 Λ_2 bestimmt wird.

Wir gehen nun dazu über, diese Ideen für das Aequivalenzproblem der indefiniten Formen zu fructifiziren. Der genaueren Durchführung stellen wir zunächst eine kurze Übersicht der abzuleitenden Resultate voraus.

1. Von einer vorgelegten indefiniten Form

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

gelangen wir zu einer reducirten Form

$$F = AX^2 + BXY + CY^2$$

durch Einführung eines reducirten Coordinatensystems, in dem wir den Einheitsvector OX nach einem Gitterpunkt einer beliebigen Polygonecke von P', den Einheitsvector OY nach dem gegenüberliegenden Eckpunkte von P' ziehen.

2. Diese Einführung ist auf sehr verschiedene Arten möglich. Es gehört daher zu einer indefiniten Form f eine ganze Serie reducirter Formen F. Dabei erhalten wir die ganze Serie aus einer einzelnen reducirten Form, indem wir den X- und den Y-Vector in gesetzmässiger Weise alternirend

längs der Seiten der Umrisspolygone entlang schieben.

3. Die Bedingung für die „Aequivalenz" zweier gegebener indefiniter Formen besteht dann einfach darin, dass die Serien der reducirten Formen oder auch nur irgend ein Paar reducirter Formen aus den beiderseitigen Serien übereinstimmen muss.

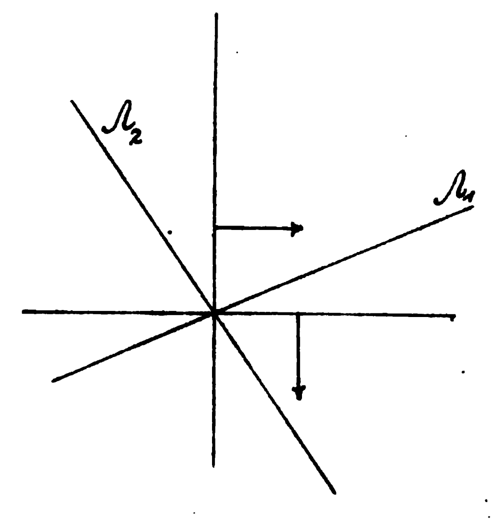
Frei. d. 6. XII. Wir beginnen mit einigen Details über die reducirten Formen.

Als Kennzeichen für eine reducirte Form fanden wir die Ungleichung: $AC < 0$. Wir können es dabei noch so einrichten, dass speciell $A > 0$ und $C < 0$ wird: Ist nämlich das Umgekehrte der Fall, so brauchen wir nur die Benennung des x- und des y-Vectors, und also auch die der Coefficienten A und C zu vertauschen, um auf die vorstehenden Ungleichungen zu kommen. Nach dieser Verabredung werden also die reducirten Formen stets in demjenigen durch die Λ_1- und Λ_2-Linie begrenzten Doppelvector positiv sein,

in welchem die x- Axe enthalten ist.

Wir machen sodann einen Unterschied zwischen Hauptreducirten und Nebenreducirten. Wir nennen eine Form hauptreducirt dann, wenn sowohl der x- wie der y - Vector ihres Coordinatensystems nach einem Hauptpunkte der Umrisspolygone verläuft, nebenreducirt dann, wenn einer dieser Vectoren in einem Nebenpunkte endigt. (Der andere Vector endigt dann sicher in einem Hauptpunkte, nämlich in demjenigen Gitterpunkte, welcher der Polygonseite des Nebenpunktes gegenüberliegt und welcher notwendig ein Eckpunkt des anderen Umrisspolygones ist.) Innerhalb der Haupt- und Nebenreducirten unterscheiden wir ferner noch je zwei Möglichkeiten a) und b). Wir betrachten zunächst die Hauptreducirten. Durch den Endpunkt des y- bez. x- Vectors geht je eine Seite der Umrisspolygone hindurch, welche parallel der x- bez. y- Axe verläuft. Im Falle a) möge die Poly-

gonseite durch den Einheitspunkt auf der Y-Axe nach dem ersten Quadranten hin verlaufen. Dann zieht die der Y-Axe parallele Polygonseite im Einheitspunkte der X-Axe in den 4ten Quadranten hinein. Wir zeichnen unser Coordinatensystem der Einfachheit halber als gewöhnliches rechtwinkeliges Coordinatensystem. Die Linie Λ_1 liegt dann notwendiger Weise zwischen der X-Axe und der Winkelhalbirenden des ersten Quadranten, die Linie Λ_2 zwischen der y-Axe und der Winkelhalbirenden des zweiten Quadranten. In diesem Falle ist



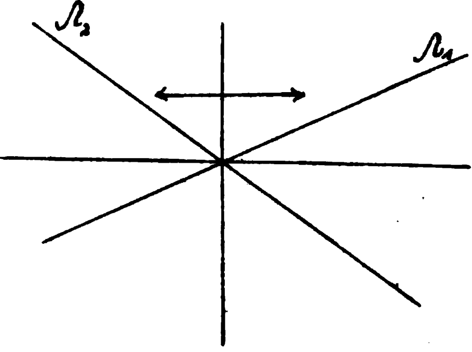
$$|\Lambda_1| > 1, \ |\Lambda_2| < 1.$$

<u>Im Falle b.)</u> der Hauptreducirten möge die Polygonseite durch den Endpunkt

des y-Vectors in den 2. Quadranten hinein verlaufen. Dann weist die Polygonseite im Einheitspunkt der x-Axe nach dem ersten Quadranten hin. Dementsprechend ändert sich die Lage der Linien Λ_1 und Λ_2. Wir haben in diesem Falle:

$$|\Lambda_1| < 1 \quad , |\Lambda_2| > 1.$$

Bei den <u>Nebenreducirten</u> ist einer der Einheitspunkte ein Nebenpunkt, d. h. ein innerer Gitterpunkt einer Polygonseite. Sei dieses <u>im Falle a.)</u> der Einheitspunkt auf der y-Axe, <u>im Falle b.)</u> der auf der x-Axe.



Im Falle a verlaufen die Λ-Linien beide zwischen der (positiven bez. negativen) x-Axe u.

den Winkelhalbirenden. In diesem Falle ist also

$$|\lambda_1| > 1, \quad |\lambda_2| > 1$$

Im Falle b.) liegen die λ-Linien zwischen der y-Axe und den beiden Winkelhalbirenden. Es wird daher

$$|\lambda_1| < 1, \quad |\lambda_2| < 1.$$

Um die Wurzelverteilung in den verschiedenen Fällen noch besser übersehen zu können, repräsentiren wir uns die möglichen Werte von x/y je durch eine besondere Gerade. Wir haben auf dieser die folgende relative Lage der Werte $\lambda_1, \lambda_2, +1, 0, -1$ gegen einander: im Falle der Hauptreducirten

a)

$\mathfrak{F} > 0$. $\mathfrak{F} < 0$ $\mathfrak{F} < 0$

-1 λ_2 0 $+1$ λ_1

b.)

$\mathfrak{F} < 0$. $\mathfrak{F} < 0$ $\mathfrak{F} > 0$

λ_2 -1 0 λ_1 $+1$

im Falle der Nebenreducirten

a)

$F < 0 \quad F > 0 \quad F < 0$

$\Lambda_2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad \Lambda_1$

b)

$F > 0 \quad F < 0 \quad F > 0$

$-1 \quad \Lambda_2 \quad 0 \quad \Lambda_1 \quad +1$

Wir tragen ferner in unsere Schemata Vorzeichen von F in den Punkten $+1$ und -1 ein. Da nach Verabredung F längs der x Axe positiv, so ist es längs der y-Axe negativ. Dem Punkte $x/y = 0$ kommt daher in allen 4 Fällen das negative Vorzeichen zu. Dasselbe Vorzeichen gilt auch nach beiden Seiten von 0 aus bis an die Stellen Λ_1, Λ_2 heran und geht jenseits derselben in das positive über. Danach ist es klar, welche Vorzeichen der Form an den Stellen $+1$ und -1 stattfinden. Wir erkennen: Unsere 4 Fälle sind durch diese Vorzeichen von einander unterschieden.

Wir können hierauf sofort die arithmetischen Kriterien für unsere 4 Fälle hinschreiben. Wir erhalten nämlich,

indem wir $x = 1$, $y = 1$, bez. $x = -1$, $y = 1$ in $\mathfrak{F}$ einsetzen, die folgenden Ungleichungen:

Im Falle der Hauptreducirten

a)

$$\begin{cases} \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} < 0, \\ \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} > 0, \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} > 0, \\ \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} < 0. \end{cases}$$

im Falle der Nebenreducirten

a)

$$\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B} + \mathfrak{C} < 0$$

b)

$$\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B} + \mathfrak{C} > 0.$$

Dazu kommen noch als allgemeingültige Bedingungen für reducirte Formen die folgenden:

$$\mathfrak{A} > 0 \text{ und } \mathfrak{C} < 0.$$

In den arithmetischen Darstellungen unserer Theorie, wo diese Einteilung, wenigstens was die Hauptreducirten angeht, gleichfalls gemacht wird, erscheint sie als etwas sehr Willkürliches, während sie sich vom geometrischen Standpunkte aus auf dem hier eingeschla-

genen Wege ganz von selbst darbietet. Man möchte fast vermuten, daß Gauß selbst bei der Entdeckung dieser Dinge von geometrischen Anhaltspunkten geleitet worden ist und daß er diese, seiner bekannten (aber nicht nachahmenswerten) Publicationsmethode zufolge, späterhin absichtlich unterdrückt hat.

Wir untersuchen nun das Gesetz, nach welchem man aus einer reducirten Form die zugehörige unbegrenzte Reihe der übrigen reducirten Formen ableiten kann. Wir nehmen an, es sei eine Hauptreducirte des Falles a) vorgelegt:

$$F = A_1 X_1^2 + B_1 X_1 Y_1 + C_1 Y_1^2$$

und wir sollen mit unserer Reihe an Λ_1 entlang schreiten. Liegt der Fall b) vor, so ist einfach X und Y zu vertauschen; sollen wir an Λ_2 entlang schreiten, so haben wir die ganze Reihe der Operationen umzukehren. Unser ursprüngliches reducirtes Coordinatensystem X_1, Y_1 ändern wir nun in gesetzmässiger Weise so ab, daß es beständig ein reducirtes Coordinatensystem bleibt.

Wir beginnen damit, den y-Vector der X-Axe parallel um eine Einheit zu verschieben. Sein Endpunkt wandert dabei auf P' vergl. die erste Figur auf pag 117. Analytisch bedeutet dieses, dass wir die Substitution

$$X_1 = X_1' + y_1'$$
$$y_1 = y_1'$$

ausüben, die wir früher als Substitution S bezeichneten. Unsere Form geht dabei über in

$$A_1 X_1'^2 + (2A_1 + B_1) X_1' y_1' + (A_1 + B_1 + C_1) y_1'^2,$$

welche neue Form nach den geometrischen oder auch nach den arithmetischen Kriterien des Falles a) sicher gleichfalls eine reducirte ist. Es kann aber sein, dass wir diese Verschiebung noch ein zweites Mal ausführen können, ohne dass unsere Form aufhörte, eine reducirte zu sein, dann vielleicht ein drittes Mal, etc. etc. Sei die grösste Anzahl von Malen, dass dieses möglich ist, μ_1. Dann ist die durch die Substitution S^{μ_1} aus F abgeleitete Form

$$(A_1, 2A_1\mu_1 + B_1, A_1\mu_1^2 + B_1\mu_1 + C_1)$$

noch eine reducirte Form, ihr letzter Coefficient $\mathfrak{A}_1\mu_1^2 + \mathfrak{B}_1\mu_1 + \mathfrak{C}_1$ also noch negativ. Durch abermalige Ausübung der Substitution S dagegen wird eine Form entstehen, deren letzter Coefficient positiv ist. Denn wir würden bei nochmaliger Verschiebung des y-Vectors di $\mathfrak{A}_1$-Linie überschreiten. Die Zahl μ_1 können wir daher arithmetisch so definiren: Es ist die grösste ganze Zahl, für welche die Ungleichung besteht:

$$\mathfrak{A}_1\mu_1^2 + \mathfrak{B}_1\mu_1 + \mathfrak{C}_1 < 0$$

Setzen wir nun

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2,\ 2\mathfrak{A}_1\mu_1 + \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2,\ \mathfrak{A}_1\mu_1^2 + \mathfrak{B}_1\mu_1 + \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2,$$

so ist

$$(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2)$$

wiederum eine hauptreducirte Form, aber eine b). Denn es ist jetzt

$$\begin{cases} \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{C}_2 > 0 \\ \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{C}_2 < 0 \end{cases}$$

Wir sagen, dass

$$\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2.$$

auf die Hauptreducirte $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1)$ bei der gewählten Fortschreitungsrichtung längs $\mathfrak{P}'$ zuerst folgt.

Nun operiren wir in ähnlicher Weise

mit dieser Form $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2', \mathfrak{C}_2)$, indem wir nun die Rollen von x und y vertauschen. Wir verschieben den x-Vector ihres Coordinatensystems (x_2, y_2) parallel der y_2-Axe um so viele Einheiten, als möglich, d. h. solange als die Form dabei reducirt bleibt. Analytisch bedeutet dieses, dass wir die Substitution S':

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = x_2' \\ y_2 = x_2' + y_2' \end{array}\right\} S'$$

eine Anzahl von Malen (μ_2-mal) ausführen, wobei μ_2 diejenige grösste ganze Zahl ist, für welche

$$\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2' \mu_2 + \mathfrak{C}_2 \mu_2^2$$

noch positiv ist. Die Substitution S'^{μ_2} lässt dann aus $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2' \mathfrak{C}_2)$ wiederum eine Hauptreducirte a) entstehen, welche wir mit $(\mathfrak{A}_3, \mathfrak{B}_3', \mathfrak{C}_3)$ bezeichnen. An der neuen Hauptreducirten operiren wir in derselben Weise mit der Substitution S und bekommen so fortfahrend eine unbegrenzte Reihe von hauptreducirten Formen. Es ist ferner klar, dass wir diese Operationen von

$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1)$ ausgehend auch nach rückwärts fortsetzen können und müssen. Auch nach dieser Richtung wird die Reihe der Hauptreducirten eine unbegrenzte sein. Wir schreiten dann eben an Λ_2 entlang. Die Aufstellung der ganzen beiderseitig unendlichen Schaar von Formen ist hiermit erledigt; es handelt sich dabei, wie wir sehen, um eine ganz elementare Rechenvorschrift.

Wir haben noch als Ergänzung des Vorstehenden anzugeben, wie man von einer beliebigen Form f zu einer ersten reducirten Form F gelangen kann. Wir wollen uns den Weg kurz an der Figur klar machen. Wir betrachten die zu den Wurzeln ω_1 u. ω_2 von $f = 0$ gehörigen Kettenbruchentwickelungen. Ihre Umrisspolygone müssen von einer gewissen Stelle ab sich mit den

natürlichen Umrisspolygonen decken. Wenn wir also dasjenige Coordinatensystem, auf welches f ursprünglich bezogen ist, und welches wir als nicht reducirt voraussetzen wollen, längs der Umrisspolygone der Entwickelungen von ω_1 (oder auch von ω_2) in der durch den Kettenbruch indicirten Weise entlang schieben, so bringen wir es durch eine endliche Anzahl solcher Verschiebungen schliesslich in eine Lage, wo keine Einheitsvectoren in Eckpunkten von P und P' endigen, wo also das Coordinatensystem ein reducirtes geworden ist. Gleichzeitig ist dann aus f eine reducirte Form F. entstanden. Der Unterschied gegen vorhin ist dabei dieser!

Während wir von einer reducirten Form F zu neuen reducirten mittelst rationaler Kriterien fortschreiten konnten, mussten wir, wie wir gerade schilderten, zur Aufstellung einer ersten F die irrationalen Grössen ω_1 ω_2 selbst bez. ihre Kettenbrüche zu Hülfe nehmen. Es handelt sich eben zunächst noch darum, was bei einer reducirten F

von vorneherein gegeben ist, nämlich die Wurzeln von $f=0$ zu separiren.

Do. d. 12. XII. Wir werden heute untersuchen, welche besonderen Verhältnisse eintreten, wenn wir die Annahme hinzunehmen, dass die gegebene indefinite Form eine ganzzahlige Form ist. Wir nehmen an, dass die Coefficienten der Form commensurabel sind und schreiben dementsprechend

$$f = \mathfrak{M}(ax^2 + bxy + cy^2),$$

wo a, b, c ganze Zahlen, $\mathfrak{M}$ einen beliebigen Factor bedeutet. Von den Coefficienten a, b, c nehmen wir ferner an, dass sie teilerfremd sind, d. h. nicht alle drei einen gemeinsamen Factor besitzen. In diesem Falle nennen wir $ax^2 + bxy + cy^2$ eine primitive Form.

Das Resultat der letzten Stunde hinsichtlich der reducirten Formen lautete folgendermassen: Zu jeder Form f giebt es eine beiderseits unbegrenzte Reihe von Hauptreducirten Formen

$$\cdots\cdots$$

$$F_1 = (a_1, b_1, c_1)$$

$F_2 = (a_2\ ,\ b_2\ ,\ c_2)$

$F_3 = (a_3\ ;\ b_3\ ,\ c_3)$

Ist F_1 eine Hauptreducirte des Falles a), so sind es auch $F_3, F_5, \dots$, während $F_2, F_4, \dots$ Hauptreducirte des Falles b) sind. Diese Formen hängen wie die Glieder einer Kette unter einander zusammen; es wird nämlich $a_1 = a_2$, $c_2 = c_3$, $a_3 = a_4$ etc.

Da alle diese Formen unter sich und mit der gegebenen Form durch affine Substitutionen von der Determinante 1 zusammenhängen, so haben sie die gleiche Discriminante

$$D = b^2 - 4ac.$$

Sei $F = (A, B, C)$ eine beliebige Form aus der Reihe der reducirten. Da unserer Verabredung nach bei reducirten Formen $C < 0$, schreiben wir der Deutlichkeit halber $-C'$ statt C, setzen also

$$F = (A, B, -C').$$

wo jetzt C' und ebenso A positive Zahlen sind. Die Discriminante von F hat dann folgende Gestalt:

$D' = B'^2 + 4 A C'$.

Jetzt bringen wir unsere Voraussetzung zur Geltung, dass A, B', C', D' ganze und dass A, C', D' positive Zahlen sind. Auf diese Voraussetzung gründen wir einen specifisch zahlentheoretischen Schluss von übrigens äusserst einfachem Character. Wir denken nämlich D' als feste Zahl gegeben und fassen die vorstehende Gleichung als Diophantische Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten A, B', C' auf. Wir können dann sofort sagen: es gibt nur eine endliche Anzahl von ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung mit positiven Werten von A und C'. Um sie alle zu bekommen, können wir so verfahren: Wir setzen $B' = 0, 1, 2 \ldots E(\sqrt{D'})$ (wo $E(\sqrt{D'})$ die grösste ganze Zahl $\leq \sqrt{D'}$ bedeutet) und sehen zu, ob $D' - B'^2$ durch 4 teilbar ist oder nicht. Im letzteren Falle hat die Gleichung sicher keine Lösung, im ersteren zerlegen wir $D' - B'^2$ auf alle mögliche Weise in Factoren.

So erhalten wir alle möglichen Werte von A, C' und B.

Das Resultat dieser Betrachtung ist der folgende wichtige Satz: Zu einer gegebenen Discriminante gehört nur eine endliche Anzahl reducirter Formen (A, B, C).

Nun hatten wir gelernt aus einer Form eine unendliche Serie reducirter Formen

$$\ldots F_{-1}, F_0, F_1, F_2, \ldots$$

zu erzeugen. Da überhaupt nur eine endliche Anzahl von solchen Formen zur Verfügung steht, mufs eine Form in dieser Serie mehrmals vorkommen. Sei F_1 diese Form; dann gibt es eine erste Form F_{r+1}, welche dieselben Coefficienten, A, B, C hat, wie F_1. Nun entstand aus F_1 durch einen gewissen Process die ganze Reihe der Formen F. Sind wir bei diesem Process bis F_{r+1} gekommen, so haben wir, um zu F_{r+2} etc. zu kommen, mit F_{r+1} dieselben Operationen vorzunehmen, wie mit F_1. Wir werden daher beidemal dieselben Formen erhalten:

$F_{r+2} = F_2$, $F_{r+3} = F_3$, $\ldots F_{2r+1} = F_{r+1} = F_1$ etc. Wir können auch von F_1 nach rück-

wärts gehen und finden auf dieselbe Weise $F_0 = F_r$, $F_{-1} = F_{r-1}$ etc. Daraus folgt: <u>Die Serie der reducirten Formen ist periodisch und besteht aus derselben immer fortgesetzten Wiederholung derselben r Formen.</u>

Eine erste Bemerkung, die wir an diesen Satz knüpfen, bezieht sich auf das <u>Aequivalenzproblem</u>. Wir sagten 2 Formen f und f' sind äquivalent, wenn die zugehörigen Reihen der reducirten Formen $F_{-1}, F_0, F_1 \ldots F'_{-1}, F'_0, F'_1 \ldots$ übereinstimmen. Um dieses zu entscheiden, können wir aus der einen Reihe eine Form (z. B. F_1) herausgreifen und zusehen, ob sich in der anderen Reihe eine Form $F' = F_1$ vorfindet. Darin liegt aber zunächst eine gewisse Schwierigkeit. Wenn wir nämlich eine Reihe von Formen F' berechnet und die Form F_1 darunter nicht angetroffen haben, so können wir daraus noch nicht schliessen, daß f und f' nicht äquivalent sind. Denn F_1 könnte ja gerade unter den noch nicht berechneten Formen F' vorkommen. Durch unsern

Satz von der Periodicität der Formenreihe wird diese Schwierigkeit gehoben. Wir haben jetzt nämlich F_1 nur mit der endlichen Anzahl r von Formen F' zu vergleichen. <u>Wir können also jetzt</u> (d. h. im Falle der Formen mit ganzzahligen oder doch commensurablen Coefficienten) <u>die Aequivalenzfrage durch eine von vornherein angebbare endliche Anzahl von Schritten entscheiden.</u>

Eine ganze Reihe anderer interessanter Folgerungen ergibt sich, wenn wir die Substitution aufsuchen, welche F_1 in F_{r+1}, d. h. in sich selbst überführt.

Zu jeder Form F gehörte ja ein reducirtes Coordinatensystem. Dabei entstand die Elementarfigur eines jeden aus der in der Reihe vorhergehenden Elementarfigur durch eine affine Transformation von der Determinante 1 (nämlich

y_1 y_{r+1} Λ_1 X_{r+1} X_1 Λ_2

durch eine Wiederholung der Substitutionen S oder S'). Es hängen also auch die Coordinatensysteme x_r, y_r und x_{r+1}, y_{r+1}, welche zu F_r bez. F_{r+1} gehören durch eine Substitution von derselben Beschaffenheit zusammen:

$$\Sigma \left| \begin{array}{l} x_r = \alpha x_{r+1} + \beta y_{r+1} \\ y_r = \gamma x_{r+1} + \delta y_{r+1} \end{array} \right. \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Diese Substitution führt F_r in sich selbst über; wir bezeichnen sie als eine Automorphie der Form.

Alle Substitutionen, zu welchen wir beim Übergang von einer Elementarfigur unserer Reihe zu einer andern kommen, haben die Eigenschaft, nicht nur die Determinante 1 zu besitzen, sondern die positive x-Axe in denselben Sector zwischen den Linien Λ_1 und Λ_2 zu belassen. Wir wollen eine Substitution von dieser Eigenschaft vorübergehend eine reguläre nennen. Ein Beispiel einer nicht regulären Substitution liefert die folgende:

$$X_1 = -X_2, \quad\text{oder auch}\quad X_1 = -y_2$$
$$y_1 = -y_2, \qquad\qquad\qquad y_1 = +x_1$$

Wir bezeichnen daher genauer unsere Automorphie als eine <u>reguläre Automorphie.</u>

Gehen wir sodann von F_{r+1} zu F_{2r+1} weiter, so geschieht dieses gleichfalls durch eine affine Transformation von der Determinante 1. Es zeigt sich sofort, dass diese mit Σ identisch sein muss. Denn der Übergang von dem Coordinatensystem $(r+1)$ zu $(2r+1)$ setzt sich durch genau dieselbe Combination der Operationen S und S' zusammen, wie der Übergang von (1) zu $(r+1)$.

Wollen wir zu neuen regulären Automorphien kommen, so können wir also nichts anderes machen, als dass wir die Operation Σ wiederholen, d.h. von F_1 direct zu F_{2r+1}, F_{3r+1} etc. übergehen. Wir bilden uns also die Reihe der folgenden Substitutionen:

$$\ldots \Sigma^{-2}, \Sigma^{-1}, \Sigma^{0}, \Sigma, \Sigma^{2}, \ldots$$

Wir erhalten so eine unendliche Reihe

von Automorphien der Form F. Alle Substitutionen dieser Reihe sind von einander verschieden. In der That wird das Coordinatensystem (1), wie aus der Figur hervorgeht, durch alle diese Substitutionen in lauter verschiedene neue Lagen gebracht. Andrerseits gibt es auch keine anderen regulären Automorphien von F, als die hingeschriebenen. Denn es muss jede solche Substitution die Reihe der reducirten Formen in sich überführen, sie muss also eine derjenigen Coordinatentransformationen sein, welche die Elementarfigur (1) in eine der anderen reducirten Elementarfiguren verwandelt. Die obige Reihe enthält aber alle diejenigen Coordinatentransformationen dieser Art, bei welchen F, in sich übergeht.

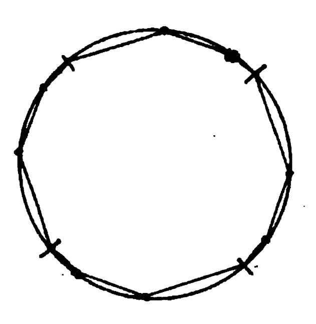
<u>Die Operation Σ mit ihren positiven und negativen Potenzen liefert uns also die sämmtlichen, unendlich vielen regulären Automorphien unserer Form.</u>

Man kann diesen Dingen noch eine interessantere Wendung geben, wenn man berücksichtigt, dass jede Substitution neuer Veränderlicher in der analytischen Geometrie auf doppelte Weise aufgefasst werden kann: entweder als Coordinatentransformation bei festgehaltener Figur, oder als Figurentransformation bei festgehaltenem Coordinatensystem. Bisher haben wir unsere Automorphie vom Standpunkte der Coordinatentransformation betrachtet. Denken wir uns jetzt das Coordinatensystem fest. Dann stellt die Substitution Σ eine affine Umformung der Ebene dar. Da ihre Coefficienten ganze Zahlen sind, so gehen dabei die Gitterpunkte wieder in Gitterpunkte über. Da ferner F_1 in sich übergeführt wird und da $F_1 = 0$ die Gleichung der Λ-Linien ist, so bleiben die Λ-Linien bei jener Umformung ungeändert. Da endlich Σ eine reguläre Substitution ist, so wer-

den auch die zwischen den Λ-Linien gelegenen Sectoren in sich übergeführt. Wir nannten aber eine solche affine Umformung, bei welcher die Λ-Linien fest bleiben und die Λ-Sectoren in sich verwandelt werden, eine Pseudodrehung. *Bei unserer zweiten Auffassung ist also die Operation Σ eine Pseudodrehung um O, welche das Punktgitter als Ganzes ungeändert lässt.* Auf Grund des Früheren können wir sagen: *es gibt unendlich viele solcher Pseudodrehungen; dieselben werden durch die positiven und negativen Potenzen von Σ erschöpft.*

Gleichzeitig mit den Λ-Linien und den Punktgittern werden auch die *Umrisspolygone* der letzteren durch unsere Pseudodrehungen mit sich zur Deckung gebracht. Dieselben besitzen also eine Regelmässigkeit (ähnlich) der der regulären Polygone in der Elementargeometrie. Während aber bei diesen jede Seite mit jeder anderen durch eine gewisse Drehung

und deren Wieder=
holungen zur Dek=
kung gebracht wird,
wird bei unseren
Polygonen immer
erst ein gewisser
Complex von Sei=
ten in einen ande=



ren solchen Complex übergeführt.
Die nebenstehende Figur stellt das ent=
sprechende Vorkommnis in der ge=
wöhnlichen Maassbestimmung dar.
Wir wollen ein solches Polygon als
semiregulär bezeichnen. Von unse=
ren Umrisspolygonen werden wir
daher sagen können: sie sind pseu=
dosemiregulär.

Hier entsteht vor Allem die Frage
nach der (hyperbolisch gemessenen)
Grösse des zur Substitution Σ gehö=
rigen Drehungswinkels. Diese Frage
werden wir unter anderen beant=
worten, indem wir im Folgenden
als analytische Ergänzung zu dem
Vorhergehenden die Theorie der

Pell'schen Gleichung entwickeln.

Wir gehen aus von der Form

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

und suchen eine reguläre Substitution

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= \gamma x' + \delta y' \end{aligned} \quad \Big| \; \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

welche f in sich überführt. Die Rechnung wird ganz einfach, wenn wir Folgendes berücksichtigen: Die angeschriebene Substitution lässt den Nullpunkt und zwei Strahlen durch denselben ungeändert. Die Gleichung der letzteren ergibt sich, wenn wir $x' = \rho x$, $y' = \rho y$ setzen; sie lautet

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y} \text{ oder } \gamma x^2 + (\delta - \alpha) xy - \beta y^2 = 0.$$

Soll die Form f bei unserer Substitution in sich übergehen, so müssen diese beiden Strahlen mit den Λ-Linien ($f = 0$) zusammenfallen. Es müssen also die Coefficienten in den Gleichungen beider Geradenpaare proportional sein:

$\gamma = au$, $\delta - \alpha = bu$, $\beta = -cu$,
unter u eine ganze Zahl verstanden.
Setzen wir noch $\delta + \alpha = t$, so berechnet sich:

$$\alpha = \frac{t - bu}{2}, \quad \beta = -cu$$

$$\gamma = au, \quad \delta = \frac{t + bu}{2}.$$

Die Zahlen t und u sind nun nicht willkürlich; aus der Relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ folgt nämlich:

$$t^2 - Du^2 = 4.$$

Dies ist die berühmte <u>Pell'sche Gleichung.</u>

Jede ganzzahlige Lösung dieser Gleichung liefert uns eine Automorphie von f.

Frei. d. 13. XII. Wir erhalten übrigens durch die Pell'sche Gleichung ausser den regulären Automorphien auch diejenigen, bei denen die Λ-Sectoren vertauscht werden. Eine Lösung ist nämlich auch:

$$t = \pm 2, \quad u = 0;$$

zu dieser gehört die Substitution

$$\alpha = \pm 1 \quad \beta = 0 \qquad \text{oder} \qquad x = \pm x'$$
$$\gamma = 0 \quad \delta = \pm 1 \qquad\qquad y = \pm y'$$

so dass für $t = -2$ $x = -x'$, $y = -y'$ entsteht. Setzen wir diese Substitution mit den sämmtlichen regulären zusammen, so ergeben sich die sämmtlichen nicht regulären Substitutionen von f in sich selbst.

Besonders einfach werden alle diese Transformationsgleichungen in Minimalcoordinaten. Wir spalten f in zwei Factoren

$$f = \xi \eta$$
$$\xi = m\left(\sqrt{a}\, x + \frac{b + \sqrt{D}}{2}\, y\right)$$
$$\eta = \frac{1}{m}\left(\sqrt{a}\, x + \frac{b - \sqrt{D}}{2}\, y\right),$$

wobei die Hinzufügung der Factoren $m, \frac{1}{m}$ nur eine Aenderung des Azimuthes bedeutet, unter welchem wir unser Gitter gegen das Coordinatensystem „orientiren". ξ, η sind die Minimalcoordinaten des Punktes x, y. Seien ferner ξ', η' Minimalcoordinaten desjenigen Punktes x', y', in welchen der Punkt x, y durch eine

Automorphie von f übergeführt wird, so daß

$$\xi' = m\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{b+\sqrt{D}}{2}\,y'\right)$$

$$\eta' = \frac{1}{m}\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{b-\sqrt{D}}{2}\,y'\right).$$

Tragen wir in die Ausdrücke für ξ und η die Werte von x und y aus den Substitutionsformeln der vorletzten Seite ein, so ergibt sich einfach:

$$\xi = \frac{t+\sqrt{D}\,u}{2}\,\xi',$$

$$\eta = \frac{t-\sqrt{D}\,u}{2}\,\eta'.$$

Die Minimalcoordinaten ξ, ξ' und η, η' zweier durch die Automorphie zugeordneter Gitterpunkte sind also untereinander proportional. Es ist dieses selbstverständlich, weil ja die Minimallinien $\xi = 0$, $\eta = 0$ bei der Automorphie nicht geändert werden.

Wir geben der Pell'schen Substitution noch eine etwas andere Form, indem wir statt $f = 0$ schreiben: $a\omega^2 + b\omega + c = a(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2) = 0$. Dann wird $\xi = n(\omega-\omega_1)$,

$\eta = n'(\omega - \omega_2)$ wo n und n' unbestimmt bleibende Factoren sind, also $\frac{\xi}{\eta} = \left(\frac{n}{n'}\right) \frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2}$; ebenso haben wir $\frac{\xi'}{\eta'} = \left(\frac{n}{n'}\right) \cdot \frac{\omega' - \omega_1}{\omega' - \omega^2}$.

Die Péll'sche Substitution kann daher folgendermassen geschrieben werden:

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} = \frac{t + u\sqrt{D}}{t - u\sqrt{D}} \cdot \frac{\omega' - \omega_1}{\omega' - \omega_2}$$

oder mit Rücksicht auf die Péll'sche Gleichung:

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} = \left(\frac{t + u\sqrt{D}}{2}\right) \cdot \frac{\omega' - \omega_1}{\omega' - \omega_2}.$$

Die Proportionalitätsfactoren müssen, da $\xi\eta = \xi'\eta'$ ist, der Bedingung genügen, dass ihr Product gleich 1 ist. Hierdurch characterisirt sich unsere Automorphie als Pseudodrehung. In der That haben wir der Péll'schen Gleichung zufolge:

$$\frac{t^2 - Du^2}{4} = 1.$$

Da nach dieser Gleichung $|t| > |\sqrt{D}u|$, so hängt das Vorzeichen der Proportio-

nalitätsfactoren von dem Vorzeichen von t ab. Nehmen wir t als positive Zahl, so sind auch jene Factoren positiv, die Automorphie also eine reguläre.

Die Grösse des Drehungswinkels berechnet sich nach pg 75 aus den vorstehenden Substitutionsformeln zu

$$\frac{i}{2}\lg\frac{t+\sqrt{D}u}{t-\sqrt{D}u} = \frac{i}{2}\lg\frac{(t+\sqrt{D}u)^2}{4} = i\lg\left(\frac{t+\sqrt{D}u}{2}\right).$$

Wir combiniren jetzt diese Entwickelungen mit den früheren geometrischen Betrachtungen. Da folgt zunächst, dass die Pell'sche Gleichung sicher Lösungen hat, welche von der trivialen $t = \pm 2$, $u = 0$ verschieden sind. Ferner aber sagen wir:

Da irgend zwei Automorphien nach einander ausgeführt wieder zu einer Automorphie führen, so werden sich irgend zwei Lösungen t, u und t', u' der Pell'schen Gleichung wiederum zu einer Lösung dieser Gleichung zusammensetzen müssen. In der That, sei

$$\xi = \frac{t+u\sqrt{D}}{2} \qquad \xi'$$

die eine

$$\xi' = \frac{t'+u'\sqrt{D}}{2}\,\xi''$$

die zweite Automorphie. Dann folgt

$$\xi = \frac{t+u\sqrt{D}}{2}\;\frac{t'+u'\sqrt{D}}{2}\;\xi'' = \frac{T+U\sqrt{D}}{2}\,\xi'',$$

$$T = \frac{tt'+uu'D}{2}, \quad U = \frac{tu'+ut'}{2}.$$

Um einzusehen, dass die Zahlen T und U ganze Zahlen sind, müssen wir hinsichtlich der Discriminante

$$D = b^2 - 4ac$$

zwei Fälle unterscheiden. Je nachdem b gerade oder ungerade, ist

entweder $D \equiv 0\ (4)$

oder $D \equiv 1\,(4)$;

aus der Pell'schen Gleichung folgt im ersten Falle, dass t und t' gerade, im zweiten Falle, dass t und u (und ebenso t' und u') gleichzeitig gerade oder ungerade sind. Allemal werden daher T und U ganze Zahlen. Sie genügen überdiess der Pell'schen Gleichung, wie sofort zu sehen ist.

Beiläufig bemerken wir: Wir können

bei der Péll'schen Gleichung auch ganz von dem Zusammenhange mit den Automorphien absehen und die Grössen

$$\frac{t+u\sqrt{D}}{2} \text{ bez. } \frac{t-u\sqrt{D}}{2}$$

als complexe Zahlen auffassen, wobei wir t und u durch die Relation verbunden denken: $t^2-Du^2=4$. Das System dieser complexen Zahlen hat nach dem, was wir soeben sahen, die Eigenschaft, sich bei der Multiplication zu reproduciren, in dem Sinne, daß das Product zweier Zahlen $\frac{t+u\sqrt{D}}{2}$ und $\frac{t'+u'\sqrt{D}}{2}$ wieder eine Zahl $\frac{T+U\sqrt{D}}{2}$ des Systems wird.

Über diese Zahlen können wir ferner auf Grund unserer früheren Betrachtungen den folgenden merkwürdigen Satz aussprechen. Alle Zahlen dieses Systems ergeben sich aus einer einzelnen kleinsten Lösung t_0, u_0 der Péll'schen Gleichung, indem man $\frac{t_0+u_0\sqrt{D}}{2}$ potenzirt.

Es entspricht nämlich jede Zahl $\frac{T+U\sqrt{D}}{2}$ einer unserer Automorphien. Nun konnten wir alle Automorphien mit

Hülfe einer kleinsten Automorphie Σ in der Form darstellen Σ^{μ}. Der Zusammensetzung zweier Automorphien entspricht die Multiplication der complexen Zahlen, der Wiederholung einer Automorphie also die Potenzirung der Zahlen. Ist daher $\frac{t_0 + u_0 \sqrt{D}}{2}$ diejenige Zahl des Systems, welche zu Σ gehört, so gehört zu Σ^{μ} die Zahl

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{D}}{2}\right)^{\mu}.$$

Der zur Substitution Σ gehörige Drehungswinkel, nach welchem wir oben fragten, berechnet sich aus der Lösung t_0, u_0 der Pell'schen Gleichung in folgender Weise

$$\phi_0 = i \lg \frac{t_0 + u_0\sqrt{D}}{2}$$

Wir nennen ϕ den Pell'schen Winkel. Wir erweitern jetzt diese Betrachtungen noch nach anderer Seite.

Wir fassen nämlich alle reducirten Formen in's Auge, welche bei gegebenem Werte der Discriminante möglich sind. Diejenigen Formen, welche

aequivalent sind, bilden eine „Klasse" von Formen, und in den reducirten Formen haben wir „Repräsentanten" der einzelnen Klasse. Nun ist es sehr wohl möglich, dass die zu derselben Discriminante gehörigen reducirten Formen sich auf verschiedene Klassen verteilen. Da es aber nur eine endliche Anzahl reducirter Formen giebt, so kann man aus ihnen sicher nur eine endliche Anzahl zusammengehöriger aequivalenter Formenserien herstellen. Es giebt daher bei gegebenem D nur eine endliche Anzahl unterschiedener Klassen.

Diese verschiedenen Klassen stehen sich aber nicht fremd gegenüber; sie bilden einen zusammenhängenden Organismus. Es geht dieses schon daraus hervor, dass allen diesen Klassen die Pell'sche Gleichung gemeinsam ist. In der That hängt diese Gleichung ja nur von dem Werte von D, nicht von den Besonderheiten der Klasse ab. Wir

werden das später noch sehr viel weitergehend entwickeln.

Unter diesen Klassen giebt es eine ausgezeichnete, welche man <u>Hauptklasse</u> nennt. Die Hauptklasse muss etwas anders definirt werden, jenachdem der Fall $D' \equiv 0(4)$ oder $D' \equiv 1(4)$ vorliegt. Im ersten Falle ist die Hauptklasse diejenige, welche die Form enthält:

$$x'^2 - \frac{D'}{4} y^2 \quad \left\{ D' \equiv 0(4) \right\}$$

Im zweiten Falle diejenige, in welcher die Form

$$x'^2 + x'y + \frac{1-D'}{4} y^2 \left\{ D' \equiv 1(4) \right\}$$

vorkommt. Alle anderen Klassen der Discriminante D' werden als <u>Nebenklasse</u> bezeichnet.

Mit den soeben angeschriebenen Hauptformen hängt die Pell'sche Gleichung auf das Engste zusammen. Setzen wir nämlich im ersten Falle $t = 2x'$, $u = y$, so lautet dieselbe:

$$x'^2 - \frac{D'}{4} y^2 = \underline{1} \ldots$$

Im zweiten Falle setzen wir $t - u = 2x'$, $u = y$, dann geht die Pell'sche Gleichung über in

$$x'^2 + x'y + \frac{1-D}{4} y^2 = 1$$

Beidemale erhalten wir aus der Pell'schen Gleichung die gleich 1 gesetzte Hauptform. Die allgemeine Lösung der Pell'schen Gleichung kommt also darauf hinaus, durch die Hauptform die Zahl 1 in allgemeinster Weise darzustellen.

So haben wir nun ein reiches Material neuer Sätze und neuer Auffassungen und es kommt darauf an, jetzt zunächst dasselbe durch Zahlenbeispiele zu illustrieren. Dabei werden sich von selbst noch einige Bemerkungen ergeben, die auf die allgemeine Theorie Bezug haben.

Ausführliche numerische Tabellen sind von Cayley berechnet worden. (Vergl. Crelle Bd. 60 oder Ges. Werke Bd. 5 pg. 141 ff). Cayley berechnet zu allen Discriminanten $|D| < 100$ und für einige weitere die zugehörigen Klassen quadratischer Formen.

Ferner sind derartige Tabellen von Legendre mitgeteilt worden (Vergl. Zahlentheorie Bd. I). Wir verweisen ins Besondere auf die Tabelle X, welche die Theorie der Pell'schen Gleichung zum Gegenstande hat. Leider finden sich überall Unterschiede in der Bezeichnung, über die man sich vorab unterrichten muss, ehe man die Tabellen gebraucht.

Hier wollen wir $D = 40$ annehmen. Zunächst berechnen wir die zu dieser Discriminante gehörigen sämmtlichen reducirten Formen. Es handelt sich dabei um die Formen (A, B, C), für welche $AC < 0$ und $B^2 - 4AC = 40$ ist. Wir stellen die Formen mit positivem A voran; die Formen mit negativem A bekommen wir aus jenen, indem wir die Vorzeichen sämmtlicher Coefficienten umkehren.

Für B setzen wir nacheinander alle geraden Zahlen $|B| < \sqrt{40}$ und suchen die zugehörigen Lösungen der Diophantischen Gleichung $B^2 - 4AC = 40$,

für welche $\mathfrak{A}\mathfrak{C} < 0$, $\mathfrak{A} > 0$ ist. Es ergibt sich

$$\mathfrak{B} = 0 \begin{cases} 10, & 0, & -1 \\ 5, & 0, & -2 \\ 2, & 0, & -5 \\ 1, & 0, & -10 \end{cases}$$

$$\mathfrak{B} = \pm 2 \begin{cases} 9, & \pm 2, & -1 \\ 3, & \pm 2, & -3 \\ 1, & \pm 2, & -9 \end{cases}$$

$$\mathfrak{B} = \pm 4 \begin{cases} 6, & \pm 4, & -1 \\ 3, & \pm 4, & -2 \\ 2, & \pm 4, & -3 \\ 1, & \pm 4, & -6 \end{cases}$$

$$\mathfrak{B} = \pm 6 \begin{cases} 1, & \pm 6, & -1. \end{cases}$$

Hiernach gibt es 20 reducirte Formen mit positivem $\mathfrak{A}$, ebenso viele Formen existiren mit negativem $\mathfrak{A}$, so dass die Gesamtzahl der reducirten Formen in diesem Falle 40 beträgt und mit der Discriminante zufälliger Weise übereinstimmt.

Unter diesen Formen suchen wir uns die Hauptreducirten erster und zweiter Art aus, d. h. diejenigen Formen, für welche die Ungleichungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{l} A + B' + C < 0 \\ A \pm B' + C > 0 \end{array}\right\}$$

$$\text{bez. } \left.\begin{array}{l} A + B' + C > 0 \\ A \pm B' + C < 0 \end{array}\right\}$$

Es erweisen sich als Hauptreducirte 1. Art die folgenden 4 Formen:

3, − 2, − 3
3, − 4, − 2
2, − 4, − 3
1, − 6, − 1

Ebenso gross ist die Anzahl der Hauptreducirten 2 Art. Sie entstehen offenbar aus denen der ersten Art dadurch, dass wir B' im Vorzeichen umkehren. Demnach sind Hauptreducirte der 2ten Art die folgenden 4 Formen:

3, + 2, − 3
3, + 4, − 2
2, + 4, − 3
1, + 6, − 1.

Die übrigen 32 Formen sind Nebenreducirte. In's Besondere gehört die Hauptform $(-1, 0, -10)$, sowie alle Formen mit $\mathfrak{B} = 0$ zu den Nebenreducirten. Von den Nebenreducirten werden wir nur beiläufig sprechen.

Wir stellen nun die zusammengehörigen Serien der hauptreducirten Formen auf, indem wir von irgend einer Hauptreducirten 1ter Art ausgehen. Sei die Ausgangsform

$$\mathfrak{F}_1 = 3x^2 - 2xy - 3y^2.$$

Auf diese Form üben wir die Operation

$$\int \begin{cases} x = x' + y' \\ y = \phantom{x' +{}} y' \end{cases}$$

so oft aus, bis eine Hauptreducirte der 2ten Art entsteht. Es ergibt sich schon beim ersten Male

$$\mathfrak{F}_2 = 3x^2 + 4xy - 2y^2.$$

An dieser Form operiren wir mit

$$\int' \begin{cases} x = x' \\ y = x' + y' \end{cases}.$$

Dabei entsteht zuerst die Nebenreducirte $5x^2 - 2y^2$; bei nochmaliger Anwendung von S' aber ergibt sich:

$$F_3 = 3x^2 - 4xy - 2y^2.$$

Jetzt wenden wir wieder S an und bekommen die Hauptreducirte

$$F_4 = 3x^2 + 2xy - 3y^2.$$

Hieraus entsteht durch die Operation S'

$$F_5 = 2x^2 - 4xy - 3y^2,$$

sodann durch S^2

$$F_6 = 2x^2 + 4xy - 3y^2.$$

Operiren wir an F_6 wiederum mit S', so erhalten wir schliesslich

$$F_7 = 3x^2 - 2xy - 3y^2 = F_1.$$

In unserm Beispiele treten also 3 Hauptreducirte der 1ten Art (und ebenso viele der 2ten Art) zu einer ersten Formenserie zusammen. Wir wollen uns die Aufeinanderfolge der Formen

schematisch durch Punkte einer geschlossen Curve versinnlichen. Wir erhalten dann in unserem Falle das nebenstehende Bild.

3, 2, −3 — 2, 4, −3 — 3, 4, −2 — 2, −4, −3 — 3, −4, −2 — 3, 2, −3

Zu unserer Formenserie gehört eine kleinste Substitution, welche diese Serie in sich transformirt. Diese Substitution können wir, wenn wir von F ausgehen, nach dem Vorstehenden symbolisch schreiben:

$$(x, y) = S S'^{2} S S'^{1} S^{2} S' (x', y');$$

ausgerechnet lautet dieselbe

$$x = 25 x^{VI} + 18 y^{VI},$$

$$y = 18 x^{VI} + 13 y^{VI}.$$

Dieser kleinsten Substitution entspricht eine kleinste Lösung der Pell'schen Gleichung:

$$t^2 - 40 u^2 = 4.$$

Dieselbe berechnet sich nach pg. 141 aus den Coefficienten unserer Substitution und der Ausgangsform zu

$t = 38, \quad u = 6.$

Alle anderen Lösungen der Pell'schen Gleichung müssen sich aus dieser Lösung durch Potenziren ableiten lassen. Der Pell'sche Winkel wird $i \log(19 + 6\sqrt{10})$.

Von den 8 Hauptreducirten Formen der Discriminante + 40 bleiben nur 2 Formen übrig, welche nicht in unserer ersten Formenserie enthalten sind. Dieselbe müssen sich zu einer 2ten Serie zusammenschliessen. Wir gehen bei der Berechnung dieser 2ten Serie von der Hauptreducirten erster Art

$$F_1 = x^2 - 6xy - y^2$$

aus. An dieser Form operiren wir mit $S\,P^\mu$, wobei wir $\mu = 1, 2 ..$ wählen werden, bis wir wieder auf eine Hauptreducirte kommen. Nehmen wir $\mu = 3$, so entsteht die Hauptform $x^2 - 10y^2$, welche eine Neben-

reducirte ist. Erst für $\mu = 6$ ergibt sich wieder eine Hauptreducirte u. zw. die noch restirende Form:

$$F_2 = X^2 + 6XY - Y^2,$$

wie es sein muss. Üben wir auf diese successive die Operationen S'^{μ} aus, so kommen wir für $\mu = 6$ wieder auf F zurück. Unsere zweite Formenserie besteht also nur aus 2 Hauptreducirten; übrigens enthält sie dafür um so mehr Nebenreducirte, nämlich 10. Wollen wir uns auch diese Serie schematisch auf einem geschlossenen Curvenzuge veranschaulichen so kommen wir zu der nebenstehenden Figur.

1, −6, −1

1, 6, −1

Wir haben nunmehr die sämmtlichen 20 reducirten Formen mit positivem A auf 2 Klassen untergebracht. Zu den Formen mit negativem A konnten wir durch unser bisheriges Verfahren

nicht gelangen, weil wir nur die „regulären" Substitutionen S und S' angewandt haben, welche die A-Sectoren einzeln in sich transformiren. Um zu erkennen, ob sich die Formen mit negativem A in dieselben Klassen einordnen, müssen wir diejenigen Substitutionen von der Determinante 1 hinzunehmen, welche die A-Sectoren vertauschen. Eine einfachste solche Substitutionen ist die uns von früher bekannte Operation:

$$T \begin{cases} x = -y' \\ y = x' \end{cases}.$$

Wenden wir diese auf eine reducirte Form $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ mit negativem A (und folglich mit positivem C) an, so entsteht eine Form $Cx'^2 - Bx'y' + Ay'^2$ mit positivem ersten Coefficienten. Die Formen mit negativem ersten Coefficienten sind also je mit einer Form aequivalent, deren erster Coefficient positiv ist. Diese Formen ordnen sich also alle

gemein in die Classen der Formen mit positivem A, in unserem Falle somit in die beiden vorher gefundenen Klassen ein. Es gibt bei der Discriminante 40 nur zwei verschiedene Klassen quadratischer Formen.

Bei dieser Gelegenheit bringen wir noch einige Details zur Sprache. Man bezeichnet die Form $(-A, -B', -C)$ als die zu einer gegeben Form (A, B', C) entgegengesetzte Form (forma opposita).

Wir fragen uns, wann eine Form mit ihrer entgegengesetzten aequivalent ist.

Zunächst können wir mittelst der Substitution T die Form $(-A, -B', -C)$ umsetzen in die aequivalente Form $(-C, B', -A)$. Ist (A, B', C) eine reducirte Form mit positivem ersten Coefficienten, so ist auch $(-C, B', -A)$ eine ebensolche. Daraus folgt: Soll eine reducirte Form (A, B', C) mit ihrer entgegengesetzten $(-A, -B', -C)$ aequivalent sein, so muss $(-C, B', -A)$

in derselben Formenserie enthalten sein, wie (A, B, C) selbst.

Bei der Discriminante D = 40 ist dieses wirklich der Fall. Wir deuten dieses in den Figuren durch die horizontalen Geraden an, welche je eine Form (−C, B, A) mit einer Form (A, B, C) verbinden. Im Allgemeinen trifft dieses jedoch keineswegs immer zu, wie die Cayley'schen Tabellen zeigen.

Man bezeichnet ferner eine Form, welche mit sich selbst uneigentlich aequivalent ist, d.h. bei einer affinen Transformation von der Determinante −1 ungeändert bleibt, als Anceps-Form (nach Gauss) oder als ambige Form (nach Kummer). Die Formenklasse, in welcher eine Anceps-Form enthalten ist, heisst auch eine Anceps-Klasse. Um zu entscheiden, wann eine Klasse ambig ist, transformiren wir eine reducirte Form (A, B, C) der Klasse mittelst der Substitution

$$x = x'$$
$$y = -y',$$

welche von der Determinante − 1 ist, in die gleichfalls reducirte Form $(A, -B, C)$. Diese Form muss mit der gegebenen eigentlich-aequivalent sein, wenn die gegebene Form mit sich selbst uneigentlich aequivalent ist. Daraus folgt: Wenn unsere Klasse eine Anceps„ Klasse sein soll, so muss die Form $(A, -B, C)$ in derselben Formenserie vorkommen, wie (A, B, C).

Die Betrachtung der Figuren von pg. 157 und 159 zeigt, daß im Falle $D = 40$ beide vorhandenen Klassen Anceps-Klassen sind. Wir deuten dieses durch die Verticalen Geraden an, welche je von einer Form (A, B, C) zu einer Form $(A, -B, C)$ hinführen. Im allgemeinen Falle trifft dieses natürlich nicht zu.

Frei. d. 21. XII. Der Theorie der indefiniten quadratischen Formen haben wir als Ergänzung heute noch einige Bemerkungen über die arithmetischen Kriterien hinzuzufügen, durch welche wir entscheiden können,

ob ein Gitterpunkt zu einem der natürlichen Umrisspolygone gehört. Dazu ist offenbar zunächst erforderlich, dass die Coordinaten des Gitterpunktes x und y keinen gemeinsamen Teiler haben. Als weitere Bedingung teilen wir ohne Beweis die folgende mit: Es wird in den Ecken der Umrisspolygone

$$f(x, y) \leqq D/4.$$

Man kann den Minimalwert von f noch genauer abschätzen. Es zeigt sich nämlich, dass f mindestens in einer Ecke der Umrisspolygone einen Wert

$$\leqq \sqrt{\frac{D}{5}}$$

annimmt. Wegen des Beweises vergleiche man eine interessante Arbeit von Markoff in Math. Annalen Bd. 15 (1879). Es wird interessant sein, die Entwickelungen von Markoff durchweg in das Geometrische zu übersetzen. Übrigens hängen diese Betrachtungen mit unseren früheren Entwickelungen betreffend das Minimum der Linearformen zusammen,

durch welche wir den Lagrange'schen Satz über Kettenbrüche (vergl. pg. 39) bewiesen.

4. Die Reductionstheorie im elliptischen Falle.

Wir hätten jetzt die entsprechende Theorie wie für die indefiniten auch für die definiten Formen zu entwickeln. Um aber vor Weihnachten zu einem guten Abschluss zu kommen, sei es gestattet, hierbei nur die Resultate anzugeben, Sie finden übrigens alles Wesentliche über definite Formen auch in der Litteratur vor.

Sei $f = ax^2 + bxy + cy^2$ eine definite Form, für welche also $D = b^2 - 4ac < 0$ ist. Wir setzen $D = -\Delta$, so dass Δ positiv ist. Die Coefficienten a und c haben notwendiger Weise dasselbe Vorzeichen; wir wollen der Bestimmtheit wegen annehmen, dass beide positiv und, dass wir es also mit einer positiven Form f zu thun

haben. Wir bringen unsere Bemerkungen unter eine Reihe von Punkten.

1. <u>Die geometrische Deutung im Gitter</u> wird, wie wir schon früher sahen, bei den definiten Formen besonders einfach. Man reicht dabei nämlich mit der gewöhnlichen Maassbestimmung aus. Das Fundamentalparellogramm des zur Form f gehörigen Gitters hat die Seitenlängen $\sqrt{a}$, $\sqrt{c}$ und einen eingeschlossenen Winkel γ von der Grösse $\cos\gamma = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$.

Die Gittertheorie der definiten Formen ist bereits von <u>Dirichlet</u> viel benutzt worden und ausserordentlich klar in Crelle Bd. 40 auseinandergesetzt worden. Nur bei der Redaction seiner Vorlesungen ist sie leider fortgelassen worden.

2. Das Gitter, welches wir zu der Form f hinzuconstruiren, ist zunächst ein <u>Parallelengitter</u>. Denken wir uns aber die Gitterstäbe weg und achten nur noch auf die Gitterpunkte, so bekommen wir ein <u>Punktgitter</u>. Das Punktgitter ist nicht für die einzelne Form f, sondern für die ganze Klasse der mit f aequivalenten For-

men characteristisch.

3. Aus der Formenklasse heben wir eine besonders einfache Form heraus, die wir reducirte Form nennen. Dieselbe wird folgendermassen definirt. Wir suchen unter allen Gitterpunkten denjenigen auf, welcher von 0 die kleinste Entfernung hat. Die Richtung von 0 nach diesem Punkte wählen wir zur x-Axe, seine Entfernung von 0 liefert die erste Parallelogrammseite $\sqrt{A}$.

Unter allen nicht auf der x-Axe gelegenen Gitterpunkten suchen wir sodann denjenigen mit der nächstkleinsten Entfernung von 0 heraus. Die Lage dieses Punktes liefert die y-Axe, seine Entfernung von 0 die Parallelogrammseite $\sqrt{C}$. Die auf dieses Coordinatensystem transformirte gegebene Form nennen wir die zu f gehörige reducirte Form; sie laute

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2.$$

Bei der Bestimmung des reducirten Coordinatensystems können wir sowohl den x- wie den y-Vector ebenso gut

nach der einen wie nach der anderen Seite von 0 aus ziehen, weil zu jedem Punkte im Gitter auch der diametrale Punkt vorhanden ist. Abgesehen von dieser Unbestimmtheit gibt es im Allgemeinen nur ein Coordinatensystem, welches die geforderten Eigenschaften hat und also auch nur eine reducirte Form. Bei besonderen Symmetrieverhältnissen des Gitters kann jedoch unsere Construction auch zwei- und dreideutig werden; dann gibt es zwei oder drei reducirte Formen in derselben Klasse.

5. Das arithmetische Kennzeichen einer reducirten Form sind die folgenden Ungleichungen:

$$|B'| \leq A \leq C.$$

Speciell ergibt sich für den ersten Coefficienten A einer reducirten Form die Beziehung

$$A \leqq \sqrt{\frac{\Delta}{3}}.$$

6. Die Herstellung der reducirten Form (A, B', C) aus einer gegebenen Form (a, b, c) erfolgt auch hier durch alternirende

Benützung der Operationen S und S'.. Man transformirt nämlich (a, b, c) abwechselnd mittelst S^{μ} und S'^{ν}, wobei man allemal μ und ν so wählt, dass der mittelste Coefficient der transformirten Form so klein wie möglich wird. So kommt man schliesslich durch eine endliche Anzahl von Schritten zu einem absolut kleinsten Werte B und zu der zugehörigen reducirten Form.

7. Dieser Process hängt wieder enge mit der Kettenbruchentwickelung für die Wurzeln von f, die Grössen

$$\left.\begin{matrix}\omega_1\\ \omega_2\end{matrix}\right\} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$$

zusammen.

Soviel über die allgemeine Theorie der definiten Formen bei beliebigen a, b, c. Bei ganzzahligen (oder commensurabeln) Coefficienten finden die folgenden besonderen Verhältnisse statt.

1. Bei gegebenem D gibt es nur eine endliche Anzahl von Klassen. Es gibt

nämlich wegen der Begrenzungen, denen die Coefficienten der reducirten Formen unterworfen sind, nur eine endliche Anzahl von solchen Formen. Wir erwähnten bereits, dass A kleiner als $\sqrt{\frac{4}{3}}$ wird. Es gibt also nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Werte von A.

Ferner ist B kleiner als A und C durch A, B und Δ mitbestimmt.

Die Anzahl der zu gegebener Discriminante $\Delta < 100$ gehöriger Klassen kann man in's Besondere aus den obencitirten Cayley'schen Tabellen entnehmen.

2. Man wird auch hier nach den Automorphieen fragen. Was die eigentlichen Automorphien (welche die Determinante +1 haben) betrifft, so ergeben sich diese wieder aus der Pell'schen Gleichung. Dieselbe lautet jetzt:

$$t^2 + \Delta u^2 = 4.$$

Ihre Theorie wird ungemein einfach. Ist nämlich $\Delta > 4$ so gibt es nur die eine triviale Lösung $t = \pm 2$,

$u = 0$. Ausserdem existiren im Falle $\Delta = 3$ und $\Delta = 4$, wo die reducirten Formen

$$x^2 + xy + y^2$$

bez. $x^2 + y^2$

lauten werden, noch einige wenige nicht trivialen Lösungen. Am deutlichsten werden diese Verhältnisse, wenn man an den Pell'schen Winkel Φ denkt, welcher jetzt einen gewöhnlichen Winkel bedeutet. Die Automorphie ist dann eine gewöhnliche Drehung des Gitters um 0 durch diesen Winkel, bei welcher das Gitter in sich übergeht. Der Lösung $t = -2$, $u = 0$ entspricht der Winkel $\Phi = \pi$. Im Allgemeinen geht das Gitter nur bei einer Drehung um π (oder 2π) in sich über, was ja selbstverständlich ist. Für die besonderen Werte $\Delta = 3$ oder $\Delta = 4$ dagegen hat der Pell'sche Winkel die Grösse $\pi/3$ oder $\pi/4$. Das Gitter ist dann ein gleichseitiges oder ein quadratisches Gitter, welche ihrer besonderen Symmetrie wegen

bereits bei einer Drehung um $\pi/3$ oder $\pi/4$ mit sich zur Deckung kommen.

3. Auch die uneigentlichen Automorphien (von der Determinante -1) lassen sich mit einem Worte erledigen. Das Vorhandensein einer uneigentlichen Automorphie bedeutet, daß das Gitter mit sich invers congruent ist, also durch Spiegelung in sich übergeht. Dies findet nur statt bei den rechteckigen und den rhombischen Gittern. Benutzen wir unsere obige Bezeichnung von pg. 162, so können wir sagen: Die einzigen Anceps-klassen, welche in der Theorie der definiten Formen möglich sind, sind diejenigen mit einem rechteckigen oder rhombischen Punktgitter.

II. Hauptteil:

Die Reductionstheorie in ihrer Wirkung auf die Gesammtheit der binären quadratischen Formen.

Do. d. 10. I. 95. Nachdem wir im ersten Hauptteile die einzelne quadratische Form untersucht und in's Besondere ihre Reduction durchgeführt haben, soll es sich jetzt darum handeln, die Gesammtheit der zu gegebenem D gehörigen quadratischen Formen zu überblicken und die Stellung der reducirten Formen innerhalb dieser Gesammtheit zu characterisiren.

1. Allgemeiner Ansatz.

Wir recapituliren kurz die Definition der reducirten Formen. Dieselbe fiel verschieden aus, je nachdem $D < 0$ oder $D > 0$ war. Bei negativem D wurde eine Form (a, b, c) reducirt genannt,

wenn

$$|b| \leq a \leq c$$

war; die Coefficienten a und c wurden dabei als positiv vorausgesetzt, indem es genügte, von den positiven definiten Formen zu sprechen. Durch die vorstehenden Ungleichungen war die reducirte Form in eindeutiger Weise festgelegt, wenn wir von gewissen Ausnahmewerten von D absahen, die wir bald noch eingehender untersuchen werden.

Ist dagegen $D > 0$, so sollte eine Form (a, b, c) reducirt heissen, wenn

$$a\,c < 0.$$

Hier gab es im Allgemeinen zu einer vorgelegten Form unendlich viele reducirte Formen, die sich nur für commensurable a, b, c auf eine endliche Zahl reducirten.

Für den Zweck, den wir nunmehr verfolgen: den Zusammenhang der verschiedenen quadratischen Formen zu überblicken: ist die Darstellung der Formen im Gitter nicht mehr

bequem, denn es ist nicht leicht, die gegenseitige Lage von unendlich vielen Gittern zu erfassen. Wir wählen jetzt eine ganz andere Art von geometrischer Repräsentation. Wir deuten nämlich einfach die Coefficienten a, b, c, der Form als gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten im R_3, d. h. als Coordinaten eines Punktes.

Wir construiren uns zunächst die Fläche $b^2 - 4ac = 0$, welche einen Kegel darstellt. Ferner markiren wir den Ort der Punkte, für welche $b^2 - 4ac = D$ ist. Wir erhalten so, indem wir D verschiedene Werte erteilen, eine Schaar von Hyperboloiden, welche alle den genannten Kegel zum Asymptotenkegel haben. Je eines dieser Hyperboloide stellt die sämmtlichen Formen von gleichem D dar. Die Hyperboloide sind zum Teil einschalige, zum Teil zweischalige. Die einschaligen Hyperboloide liegen im Äusseren des Asymptotenkegels. Dieselben gehören zu positiven Werten

von D', repräsentiren also die indefiniten Formen. Die zweischaligen Hyperboloide liegen im Innern des Kegels. Die eine Schale senkt sich in die eine, die andere Schale in die zweite Öffnung des Kegels vom Unendlichen herein. Diese Hyperboloide gehören zu negativem D' u. zw. stellt die eine Schale die definiten positiven, die andere die definiten negativen Formen der Discriminante D' dar.

Bei dem Studium des Aequivalenzproblemes kommt es auf die Substitutionen $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ in den x, y an. Dieselben schreiben sich, als Substitutionen der nunmehrigen Variabeln a, b, c aufgefasst, folgendermassen:

$$a' = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2,$$
$$b' = 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta,$$
$$c' = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2.$$

Sie bilden in ihrer Gesammtheit eine <u>discontinuirliche Gruppe affiner Umformungen des Raumes</u>, bei welchen (da die Discriminante durch die Substi-

tution ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) nicht geändert wird) unsere sämmtlichen Hyperboloide u. in's Besondere unser Kegel in sich übergehen. Dies wäre das vollständige geometrische Gegenbild der zu betrachtenden arithmetischen Verhältnisse. Wir werden von diesem Bilde jedoch keinen Gebrauch machen, sondern wählen ein unvollständiges schlechteres Bild u. zw. lediglich aus dem Grunde, weil die Vorstellung und namentlich weil die Zeichnung der räumlichen Dinge zu schwierig ist.

Wir werden nämlich in der Folge nur auf die Verhältnisse der a, b, c achten und die Grössen $a : b : c$ als Dreieckscoordinaten in der Ebene, sagen wir kurz: <u>als Punkt im R_2</u> deuten.

Unsere obigen Transformationsformeln lauten jetzt, da doch nur die Verhältnisse der a, b, c eine geometrische Bedeutung haben sollen:

$$\varrho a' = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2$$
$$\varrho b' = 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta$$
$$\varrho c' = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2.$$

Diese Transformationen stellen jetzt in ihrer Gesammtheit eine Gruppe von projectiven Umformungen der Ebene $a:b:c$ dar. In der Ebene markiren wir uns den Kegelschnitt $b^2 - 4ac = 0$; derselbe bleibt bei den projectiven Transformationen unserer Gruppe ungeändert. Von dem absoluten Werte der Discriminante $b^2 - 4ac$ kann natürlich keine Rede mehr sein.

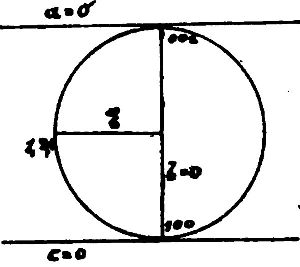
Wir kommen so von der affinen Geometrie im R_3 zu der projectiven im R_2. Unsere neue Deutung ist dabei im Grunde nichts anderes, als eine Projection des vorigen räumlichen Bildes, nämlich die Projection vom Coordinatenanfangspunkt des R_3 aus auf eine irgendwie gestellte Bildebene. Ein ähnliches Verhältnis findet ganz allgemein statt. Man kommt von einer gewöhnlichen Coordinatenbestimmung im R_{n+1} zu einer projecti-

ven im R_n, indem man jenen auf diesen projiciert.

In unserem Falle hat das Coordinatensystem eine charakteristische Lage gegen den Fundamentalen Kegelschnitt $b^2 - 4ac = 0$. Es sind nämlich die 2 Seiten $a = 0$, $c = 0$ des Coordinatendreiecks Tangenten an den Kegelschnitt, während die dritte $b = 0$ die Berührungssehne jener Tangenten ist. Wir haben den Kegelschnitt nebenstehend als Ellipse gezeichnet. Das ist natürlich völlig willkürlich; denn in der projectiven Geometrie gibt es keinen Unterschied zwischen Ellipse, Hyperbel und Parabel, oder was dasselbe besagt, bei Benutzung projectiver Coordinaten stellt die Gleichung $b^2 - 4ac = 0$ bei geeigneter Wahl des Coordinatensystems jeden beliebigen Kegelschnitt dar.

Wir werden die in der Lage des Coordinatensystems zur Verfügung stehende

Willkür dazu benutzen, unsere Figur besonders einfach zu gestalten. Wir wollen zwei Seiten des Coordinatendreiecks ($a=0$ und $c=0$) parallel und im Abstande 2 zu einander legen und die dritte ($b=0$) rechtwinklich zu ihnen annehmen. Dem alsdann noch völlig willkürlichen Einheitspunkte geben wir den Abstand $1, \frac{1}{2}, 1$ bez. von $a=0$, $b=0$, $c=0$. Unser Kegelschnitt geht durch den Punkt $a:b:c = 1:2:1$ hindurch, zufolge unserer Verfügung über den Einheitspunkt ist dieses ein Punkt, welcher von den drei Coordinatenaxen je den Abstand 1 besitzt. Ausserdem muss der Kegelschnitt die Linien $a=0$ und $c=0$ im Punkte $0,0,1$ bez. $1,0,0$ berühren. Durch diese Bedingungen ist der Kegelschnitt eindeutig bestimmt. Nun genügt aber der in der Figur verzeichnete Kreis vom Radius 1 je-



nen Bedingungen. Mithin wird vermöge unserer besonderen Annahme des Coordinatensystems der fundamentale Kegelschnitt zum Einheitskreise.

Im Übrigen ist diese Specialisirung des Coordinatensystems ganz unwesentlich und geschieht lediglich aus Bequemlichkeitsrücksichten. Es kann als gute Übung in der projectiven Geometrie empfohlen werden, die folgenden Constructionen bei einer beliebigen Hyperbel durchzuführen.

Wir wollen die Punkte des Kreises durch einen Parameter individualisiren. Zu dem Zweck schreiben wir die Gleichung des Kreises in die Form:

$$\frac{b}{2a} = \frac{2c}{b} = -\omega$$

oder

$$2a : -b : 2c = 1 : \omega : \omega^2,$$

womit die Parameterdarstellung des Kreises geleistet ist.

Wir legen ferner die Tangente an den Kreis im Punkte a', b', c'. Ihre Gleichung ist

$$bb' - 2ac' - 2a'c = 0,$$

wo a, b, c die laufenden Coordinaten eines Tangentenpunktes sind. Bedeutet ω den zum Berührungspunkte gehörigen Parameter, so können wir die Gleichung der Tangente auch schreiben:

$$a\omega^2 + b\omega + c = 0.$$

Hieraus berechnet man

$$\omega = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

als Parameter derjenigen beiden Punkte des Kreises, nach welchen vom Punkte a, b, c aus Tangenten verlaufen. Daran schliessen sich zwei Bemerkungen an: 1.) Im Innern des Kreises muss $b^2 - 4ac$ negativ, im Äusseren positiv sein, denn die von einem innern bez. äusseren Punkte auslaufenden Tangenten sind imaginär bez. reell. Für die quadratischen Formen bedeutet dieses Folgendes: Die definiten Formen finden im Innern des Kreises, die indefiniten ausserhalb desselben ihre Interpretation. 2.) Setzen

wir $\omega = \frac{x}{y}$, so geht die Gleichung der Tangente über in

$$a x^2 + b x y + c y^2 = 0.$$

Daraus folgt: die beiden Wurzeln von $\frac{x}{y}$, welche wir durch Nullsetzen der quadratischen Form erhalten, sind die Parameter ω derjenigen beiden Kreispunkte, in denen die vom Punkte a, b, c ausgehenden Tangenten den Kreis berühren. Hieraus folgt, dass ω bei der auf pg. 178 gegebenen Collineation einerseits die lineare Substitution $\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}$ erfährt; Collineation und Substitution sind wechselseitig eindeutig aneinander gebunden.

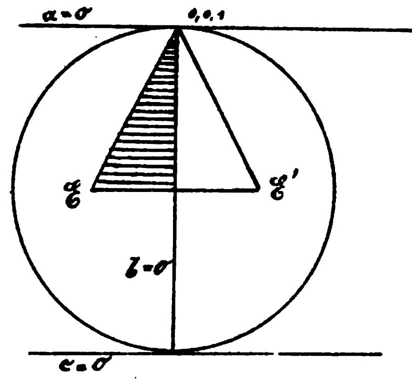
2. Die definiten quadratischen Formen und die Punkte im Innern des Kegelschnittes.

Wir wenden uns nun speciell zu den definiten Formen, studiren also das Innere des Kreises. Hier grenzen

wir uns zunächst den Raum für die reducirten Formen ab. Nehmen wir in den die reducirten Formen definirenden Bedingungen

$$|b| \leqq a \leqq c$$

die Gleichheitszeichen, so erhalten wir die Begrenzung des gesuchten Raumes. Dieselbe wird gebildet von den Geraden $b = a$, $b = -a$ und $a = c$. Die Gerade $b = a$ ist die Verbindungslinie des Punktes 0, 0, 1 mit dem Einheitspuncte E; ferner ist $b = -a$ die Verbindungslinie des Punktes 0, 0, 1 mit dem in Bezug auf $b = 0$ zu dem Punkte E symmetrisch gelegenen Punkte E'. Endlich ist $a = c$ die Gerade EE'. Das von diesen drei Geraden eingeschlossene Dreieck bildet den „reducirten Raum" für die definiten Formen. Dies Dreieck wird



noch durch die Gerade b-o in zwei Teildreiecke zerlegt, von denen wir das eine schraffirt, das andere nicht schraffirt haben, wir nennen das einzelne dieser beiden Dreiecke ein „Fundamentaldreieck"

Nun gibt es, wie wir wissen, zu jeder definiten quadratischen Form eine und im Allgemeinen auch nur eine reducirte Form, welche mit ihr aequivalent ist. Mit anderen Worten: Es ist möglich einen jeden Punkt des Kreisinnern durch eine der $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ Collineationen in einen und im Allgemeinen auch nur in einen Punkt des reducirten Raumes hineinzubringen. Wenden wir umgekehrt alle die unendlich vielen Collineationen $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ auf den reducirten Raum an, so erhalten wir <u>eine unendliche Anzahl von weiteren Dreiecken. Dieselben müssen nach dem eben Gesagten das Innere des Kreises lückenlos und einfach überdecken.</u>

Frei. d. 10. I. Die so entstehende Figur

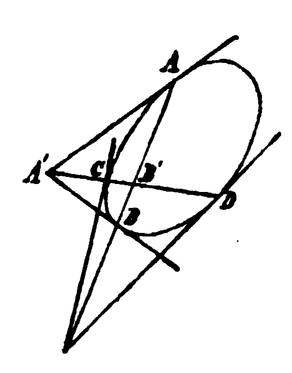
hat in der vorliegenden Theorie und im Anschlusse daran z. B. auch in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen eine fundamentale Bedeutung. Um die Figur vollständig zu entwickeln, lösen wir erst eine etwas andere Aufgabe, nämlich wir construiren auf der Peripherie des Kreises eine Scala der in dem Parameter ω rationalen Punkte. Dabei gehen wir von den drei Punkten $\omega = 0, \infty, 1$ aus. In unserer Kreisfigur sind dieses bez. die Punkte mit den homogenen Coordinaten 0,0,1; 1,0,0; 1,-2,1, d. h. drei Punkte in sehr spezieller Lage. Wir können aber ebensogut von drei beliebigen Punkten auf einem beliebigen Kegelschnitt ausgehen, diesen Punkten die Parameter 0, ∞, 1 beilegen, und nach denjenigen Punkten fragen, welche in Bezug auf sie rational sind. In der That brauchen wir nur zwei der gegebenen Punkte herauszugreifen und in diesen die Tangenten an den gegebenen Kegelschnitt zu legen. Dann liefern uns diese Tangenten zusammen mit der Berührungssehne

ein Coordinatendreieck, in Bezug auf welches der Kegelschnitt die Gleichung $b^2 - 4ac = 0$ annimmt. Bestimmen wir jetzt den Parameter w so, wie es oben geschehen, so erhalten die zwei auf dem Kegelschnitt gelegenen Ecken des Coordinatendreiecks die Parameter $w = 0$ und $w = \infty$. Durch passende Wahl des Einheitspunktes können wir dann noch erreichen, dass der dritte der gegebenen Punkte den Parameter $w = 1$ erhält. Indem wir in solcher Weise von einem allgemeinen Kegelschnitt und drei beliebigen Punkten A, B, C auf ihm ausgehen, haben wir den Vorteil, dass die projective Bedeutung der jetzt zu beschreibenden Constructionen klarer wird, wie wenn wir an unserer speciellen Figur operiren würden.

Bei allen Constructionen der projectiven Geometrie ist der fundamentale Process dieser: <u>zu 3 gegebenen Elementen A, B, C das 4te harmonische D zu construiren</u>. Sind

die Elemente A, B, C Punkte einer Geraden oder Strahlen eines Büschels, so ist die Construction des 4ten harmonischen vollauf bekannt. Liegen aber die Punkte A, B, C wie hier auf einem Kegelschnitt, so müssen wir zuerst definiren, wann wir vier Punkte eines Kegelschnitts harmonisch nennen wollen. Diese Definition stützt sich auf den Satz, daß das Doppelverhältnis von 4 Strahlen, welche irgend 4 Punkte des Kegelschnitts von einem 5ten Punkte des Kegelschnitts aus projiciren, unabhängig ist von der Lage dieses Punktes. Man bezeichnet allgemein als Doppelverhältnis von vier Punkten des Kegelschnitts eben das Doppelverhältnis von vier solchen projicirenden Strahlen. Hiernach können wir entscheiden, wann vier Punkte A, B, C, D auf dem Kegelschnitt harmonisch liegen, d. h. wann das Doppelverhältnis der projicirenden Strahlen gleich − 1 ist. Wir behaupten: Die Punkte liegen harmonisch, wenn die Verbindungslinien AB und

<u>C D' conjugirte Pōlaren sind.</u> In diesem Falle ist nämlich A' (vergl. die Figur), der Pōl von A B', auf C D' gelegen. Projiciren wir nun die Punkte A B' C D' speciell von A aus, so ergeben sich als projicirenden Strahlen die Geraden A C, A D', A A', A B'! Dieselben sind harmonisch, weil es ihre Schnittpunkte C, D', A', B' mit der Geraden C D' nach Voraussetzung sind. Also liegen auch die Punkte A, B', C, D' harmonisch, w. z. b. w.



Hiernach stellt sich die Construction des zu A, B', C gehörigen vierten harmonischen Punktes D' folgendermasen. Wir construiren den Pōl A' zu der Geraden A B' und verbinden A' mit C. Der zweite Schnittpunkt der Geraden A' C mit dem Kegelschnitt ist der gesuchte Punkt D'.

Daneben stellen wir das <u>analytische</u>

Kriterium für die harmonische Lage.

Eine Gerade, welche die Punkte $a = 0, b = 0$ und $a = a', b = b'$ verbindet, hat die Gleichung

$$ab' - ba' = 0.$$

Ist a', b' ein Punkt des Kegelschnittes mit dem Parameter ω, so wird zufolge der Einführung des Parameters ω . $a' : - b' = 1 : 2\omega$. Mithin lauten die Gleichungen derjenigen vier Strahlen, welche die Punkte $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ mit der auf dem Kegelschnitt gelegenen Coordinatenecke $a = 0, b = 0$ verbinden:

$$b + 2\omega_1 a = 0$$
$$b + 2\omega_2 a = 0$$
$$b + 2\omega_3 a = 0$$
$$b + 2\omega_4 a = 0.$$

Das Doppelverhältnis dieser vier Strahlen hat bekanntlich den Wert

$$\lambda = \frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_1 - \omega_4} : \frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_4}.$$

Setzen wir noch homogen machend

$$\omega_1 = \frac{x_1}{y_1}, \quad \omega_2 = \frac{x_2}{y_2},$$

so können wir unter Einführung von zwei neuen Parametern μ und ν schreiben

$$\omega_3 = \frac{x_1 + \mu x_2}{y_1 + \mu y_2}, \quad \omega_4 = \frac{x_1 + \nu x_2}{y_1 + \nu y_2}$$

Dann findet man durch einfache Umrechnung

$$\lambda = \frac{\mu}{\nu}$$

Soll also $\lambda = -1$ werden, so muss $\nu = -\mu$ sein. Hiernach können wir das analytische Kriterium für die harmonische Lage folgendermassen formuliren: Sind 3 Punkte des Kegelschnittes mit den Parametern

$$\omega_1 = \frac{x_1}{y_1}, \; \omega_2 = \frac{x_2}{y_2}, \; \omega_3 = \frac{x_1 + \mu x_2}{y_1 + \mu y_2}$$

gegeben, so ist der zugehörige vierte harmonische Punkt der folgende:

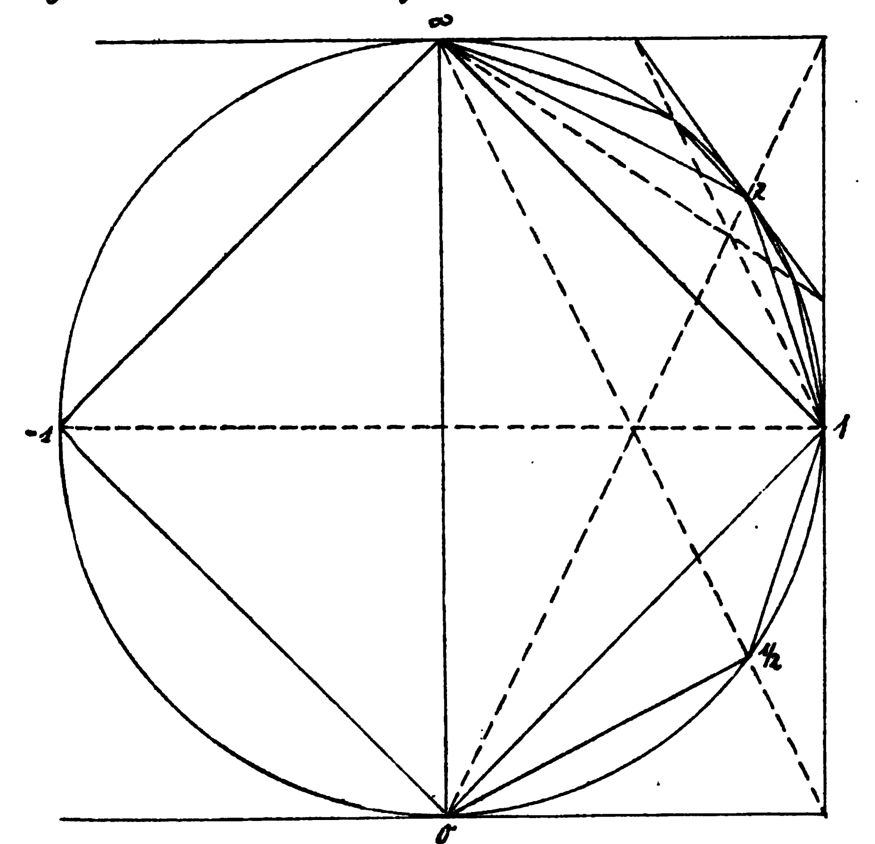
$$\omega_4 = \frac{x_1 - \mu x_2}{y_1 - \mu y_2}.$$

Es ist klar, dass wenn wir von rationalen Punkten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ausgehen, wir durch unsere Construction und die parallel laufende Rechnung

immer wieder zu rationalen Punkten geführt werden. –

Wir gehen nun auf unsere specielle Kreisfigur zurück und construiren zu den Punkten 0, 1, ∞ auf alle Weisen den vierten harmonischen Punkt, indem wir unsere Construction auf den vorliegenden Fall specialisiren. Wir suchen also die Pole bez. zu den Geraden 0, 1; 1, ∞; ∞, 0 auf und verbinden diese bez. mit den Punkten ∞, 0, 1. Die zweiten Schnittpunkte der Verbindungslinien mit dem Kreise liefern uns die drei 4ten harmonischen Punkte, welche bei veränderter Reihenfolge der Punkte 0, 1, ∞ möglich sind. Jene drei Verbindungsgeraden – wir können sie die „Hülfsgeraden" nennen – schneiden sich, wie man sieht in einem Punkte. Es folgt dieses aus dem Brianchon'schen Satze, nach welchem sich bekanntlich in jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Sechsecke die 3 Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken in einem Punkte tref-

fen. Lässt man nämlich das allgemeine Sechseck in die drei doppelt zu zählenden Tangenten in den Punkten $0, 1, \infty$ ausarten, so gehen die drei Verbindungslinien, von welchen der Brianchon'sche Satz spricht, in unsere drei Hülfsgeraden über. Den gemeinsamen Schnittpunkt der drei Hülfsgeraden können wir etwa als den „Mittelpunkt" des Dreiecks $0, 1, \infty$ bezeichnen. Analytisch sind die drei



neuen auf der Kreisperipherie construirten Punkte nach der soeben abgeleiteten Formel für das Doppelverhältnis durch die Parameter $\frac{1}{2}$, 2, −1 bestimmt.

Zu unserem Ausgangsdreieck 0 1 ∞ haben wir durch diese Construction 3 neue Dreiecke hinzugezeichnet, nämlich die Dreiecke ∞, 2, 1; −1, $\frac{1}{2}$, 0; 0, −1, ∞. Jetzt wiederholen wir dieselbe Construction mit jedem dieser neuen Dreiecke. Wir finden dann je zwei neue Punkte des Kreises und dementsprechend je zwei neue Dreiecke. Indem wir so fortfahren, bilden wir einen geometrischen Algorithmus aus, durch welchen wir successive das ganze Innere des Kreises mit Dreiecken und die ganze Peripherie mit Punkten erfüllen, (welche dieselbe ersichtlich überall dicht bedecken). Jedes Dreieck ist dabei durch seine 3 Hülfsgeraden, die sich in seinem „Mittelpunkte" kreuzen, in sechs Unterdreiecke zerlegt. Die Frage wird sein, welche ω Werthe

den construirten Dreiecksecken zugehören, überhaupt wie sich unser geometrischer Process im analytischen Gewande darstellt.

Do. d. 16. I. 96. Hierbei können wir uns auf denjenigen Teil der Figur beschränken, welcher rechts von der Geraden 0∞ liegt und welcher die Punkte mit positivem Parameter ω enthält. Die Verteilung des Parameters in der linken Hälfte der Figur ist nämlich eine ganz analoge: hier befinden sich die Punkte mit negativem ω, wobei der Punkt $-\omega$ aus dem Punkte $+\omega$ durch eine Umklappung um die Gerade 0∞ hervorgeht.

Wir fragen also nach dem arithmetischen Character derjenigen positiven ω-Werte, welche zu den bei unserer Construction successive erreichten Dreiecken gehören. Zunächst ist klar, dass alle diese Werte rationale Zahlen sind; denn einerseits sind es die Ausgangswerte $0, \infty, 1$, andererseits ist die Construction des vierten harmonischen Punktes eine rationale Ope-

ration. Wir schreiben daher die Parameter in die Form $\frac{a}{b}$, wobei wir die Spaltung des ω in Zähler und Nenner allemal so vornehmen, dafs diese positiv sind und keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Für die Punkte $\omega = 0$ und $\omega = \infty$, wo diese Spaltung unbestimmt wird, setzen wir die Zerlegungen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$ fest.

Es seien nun $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ die beiden Eckpunkte einer Seite irgend eines unserer Constructionsdreiecke, wobei $\frac{a}{b}$ derjenige der beiden Eckpunkte sein möge, welcher den grösseren Parameter besitzt, so dass $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. Gehen wir in der Construction einen Schritt weiter, so legt sich an die genannte Dreiecksseite ein neues Dreieck an, welches einen neuen rationalen Punkt unserer Scala liefert. Wir behaupten dann:

1.) Für die beiden Eckpunkte $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gilt die Relation

$$ad - bc = 1$$

2.) Der Parameter der dritten Ecke des neuen Dreiecks berechnet sich aus den Parametern $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ der beiden

anderen Ecken nach der Formel:

$$\omega = \frac{a+c}{b+d} .$$

Diese Behauptungen beweisen wir durch vollständige Induction. Was zunächst die Ausgangspunkte $\frac{a}{b} = \frac{1}{0}$ und $\frac{c}{d} = \frac{0}{1}$ betrifft, so genügen diese der Relation 1); auch hat der durch unsere Construction zunächst gelieferte Punkt 1 die sub 2) angegebene Form $\omega = \frac{1+0}{0+1}$. Indessen war die Benennung dieser drei Punkte doch nur eine conventionelle; sie ergab sich nicht als notwendige Folge aus unserer Construction. Um daher die Richtigkeit unserer Angaben für den ersten Schritt des Verfahrens darzuthun, gehen wir auf die Dreiecksseite $\frac{a}{b} = \frac{1}{1}$, $\frac{c}{d} = \frac{0}{1}$ ein und betrachten ausserdem den Punkt $\omega = \frac{1}{2}$. Für diese bestehen die Behauptungen 1) und 2) ersichtlich gleichfalls zu recht. Wir nehmen nun an, dass wir durch eine beliebige Anzahl von Constructionen zu einem Dreiecke gelangt sind, dessen Eckpunkte,

den angegebenen Regeln entsprechend die Parameter haben:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a+c}{b+d} \text{ mit } ad-bc=1.$$

An dieses Dreieck setzen sich durch eine abermalige Wiederholung unserer Construction zwei neue Dreiecke an. Wir betrachten dasjenige Dreieck, welches mit dem vorhergehenden die Seite $\frac{a+c}{b+d}$ bis $\frac{c}{d}$ gemein hat. Die Frage wird sein, ob auch die Ecken dieses Dreiecks den angegebenen Regeln genügen. Zwei seiner Ecken sind uns bekannt; es sind dieses die Punkte $\frac{a+c}{b+d}$ und $\frac{c}{d}$. Wir bezeichnen dieselben jetzt kürzer mit $\frac{a'}{b'}$ bez. $\frac{c'}{d'}$, und bemerken, daß wir danach statt $\frac{a}{b}$ auch schreiben können: $\frac{a'-c'}{b'-d'}$. Es ist nun erstlich

$$a'd'-b'c'=(a+c)d-(b+d)c=ad-bc=1,$$

so daß die Behauptung 1) auch für das neue Dreieck richtig ist. Die dritte Ecke des in Rede stehenden Dreiecks ist unserer Construction zufolge als vierter harmonischer Punkt zu den Ecken

$$\frac{a'}{b'}, \frac{c'}{d'} \text{ und } \frac{a}{b} = \frac{a'-c'}{b'-d'}$$

bestimmt. Nach pg. 191 hat dieser vierte harmonische Punkt daher den Parameter

$$\frac{a'+c'}{b'+c'}.$$

Damit ist auch die Richtigkeit unserer Behauptung 2) für das neue Dreieck bewiesen. Mithin gelten unsere obigen Regeln überhaupt für jedes Dreieck, welches durch beliebige Wiederholung unserer Construction erreicht wird.

Den Kernpunkt dieses Beweises erblikken wir darin, daß nach Verabredung die Spaltung der Parameterwerte in einen Zähler und Nenner ohne gemeinschaftlichen Teiler erfolgte. Hierauf stützten wir uns wesentlich im Vorstehenden, indem wir aus der Gleichung $\frac{a'}{b'} = \frac{a+c}{b+d}$ folgerten:

$$a' = a+c, \quad b' = b+d.$$

Wir betrachten einmal die ganze Reihe der nach einer gewissen Anzahl von Constructionen erreichten positiven Parameterwerte. Sie möge aus den

folgenden Brüchen bestehen:

$\frac{1}{0}, \ldots \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \ldots\ldots, \frac{0}{1}$.

Diese Reihe liefert uns die bis zu einem gewissen Grade der Dichtigkeit gediehene Scala unserer rationalen Punkte. Dabei gilt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Werten der Reihe die Relation $ad - bc = 1$. Wollen wir die Scala weiter vervollständigen, so haben wir die Werte $\frac{a+c}{b+d}$ zwischenzuschalten. Mit Reihen dieser Art beschäftigt sich Hurwitz im 44ten Bande der Mathem. Annalen (1894). Er nennt dieselben Farey'sche Reihen (nach dem englischen Mathematiker Farey, welcher von der Theorie der musikalischen Intervalle ausgehend auf diese Reihen geführt wurde).

Wir fragen nun weiter, welche rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$ bei unserer Construction als Dreiecksseiten auftreten. Die Antwort hierauf lautet einfach folgendermassen: Unser Process liefert successive alle rationa=

len Zahlen $\frac{a}{b}$ und alle rationalen Zahlenpaare $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ von der Determinante $ad - bc = 1$. Den Beweis hierfür knüpfen wir an die uns bekannten Sätze über Kettenbruchentwickelung an. Indem wir eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch entwickeln, construiren wir eine Reihe von Näherungsbrüchen $\frac{p}{q}$, zwischen welchen die Recursionsformeln bestehen.

$$\frac{p_r}{q_r} = \frac{\mu_r p_{r-1} + p_{r-2}}{\mu_r q_{r-1} + q_{r-2}}.$$

Ausser diesen, den sog. Hauptnäherungsbrüchen, betrachteten wir die Nebennäherungsbrüche, welche durch die Formel gegeben waren

$$\frac{\rho p_{r-1} + p_{r-2}}{\rho q_{r-1} + q_{r-2}} \quad \rho = 1, 2, \cdots (\mu_r - 1).$$

Die Reihe der Näherungsbrüche begann mit den fingirten Brüchen

$$\frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{0}{1}, \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{0}.$$

Die Gesamtheit dieser Brüche können wir in das folgende Schema anordnen:

$$\frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{0}{1}$$

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{0}$$

$$\frac{p_0+p_{-1}}{q_0+q_{-1}},\ \frac{2p_0+p_{-1}}{2q_0+q_{-1}},\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots\ldots,\ \frac{\mu_1 p_0+p_{-1}}{\mu_1 q_0+q_{-1}} = \frac{p_1}{q_1} = \frac{\mu_1}{1}$$

$$\frac{p_1+p_0}{q_1+q_0},\ \frac{2p_1+p_0}{2q_1+q_0},\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots\ldots\ \frac{\mu_2 p_1+p_0}{\mu_2 q_1+q_0} = \frac{p_2}{q_2} = \mu_1 + \frac{1}{\mu_2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{p_{n-1}+p_{n-2}}{q_{n-1}+q_{n-2}},\ \frac{2p_{n-1}+p_{n-2}}{2q_{n-1}+q_{n-2}},\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots\ldots\ \frac{\mu_n p_{n-1}+p_{n-2}}{\mu_n q_{n-1}+q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a}{b}$$

Dabei berechnet sich jeder Näherungsbruch aus zwei anderen Näherungsbrüchen vermöge der oben angegebenen Recursionsformeln in der Weise, dass Zähler und Nenner jenes gleich der Summe in Zähler und Nenner dieser wird. Drei in solcher Weise zusammengehörige Brüche

sind in unserem Schema durch Verbindungslinien gekennzeichnet; sie erscheinen hier als Ecken eines Dreiecks. Andrerseits schreiten wir bei der Construction der rationalen Punkte auf der Kreisperipherie von einem Dreieck zu einem nächsten fort, wobei die Ecken eines jeden dieser Dreiecke ebenfalls nach dem gerade genannten Gesetze zusammengehören. Die sämtlichen Dreiecke unseres Schemas sind daher im Sinne unserer Construction „Farey'sche Dreiecke" und die sämtlichen Zahlen unseres Schemas bezeichnen Punkte der Kreisperipherie, welche für unsere Construction erreichbar sind. Ins Besondere ist $\frac{a}{b}$ ein solcher Punkt. Nun ist aber $\frac{a}{b}$ eine ganz beliebige rationale Zahl, weil doch eine beliebige rationale Zahl in einen Kettenbruch entwickelt werden kann. Mithin ist jeder in ω rationale Punkt der Kreisperipherie für unsere Construction erreichbar. Hiermit ist

der erste Teil unserer obigen Aussage bewiesen. Es hat sich nebenbei die interessante Thatsache ergeben, daß die Reihe der Hülfspunkte, welche wir bei unserer Construction berühren müssen, um zu dem vorgelegten rationalen Werte von ω zu gelangen, übereinstimmt mit den Näherungsbrüchen in der Kettenbruchentwickelung dieses Wertes.

Die in unserem Schema verlaufenden Verbindungslinien deuten noch eine andere Eigenschaft der Näherungsbrüche, nämlich den Determinantensatz der Kettenbruchentwickelung, an. Es haben nämlich je zwei Näherungsbrüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ die Determinante $ad - bc = +1$, wenn $\frac{a}{b}$ an dem unteren, $\frac{c}{d}$ an dem oberen Ende einer Verbindungslinie steht. Umgekehrt wird jede Lösung c, d der Diophantischen Gleichung $ad - bc = 1$, in welcher wir uns a und b irgendwie teilerfremd gegeben denken, wie wir früher

zeigten durch einen Näherungsbruch der Kettenbruchentwickelung von $\frac{a}{b}$ geliefert. Die beiden Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ erscheinen daher in unserem Schema als Endpunkte einer Verbindungslinie. Alle Verbindungslinien unseres Schemas ergeben aber bei der Construction am Kreise Dreieckseiten. Daher muss jedes Zahlenpaar $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, welches der Diophantischen Gleichung $ad-bc=1$ genügt, in unserer Construction als Begrenzung einer Dreiecksseite auftreten. Hiermit ist auch der zweite Teil unserer obigen Behauptung erwiesen.

Wir führen noch im Anschluss an Hurwitz eine bequeme Bezeichnung ein. Wir nennen die Verbindungslinie zweier Punkte $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ der Kreisperipherie, wenn sie der Gleichung $ad - bc = +1$ genügen, eine <u>Elementarsehne erster Art</u>. Das zuletzt Bewiesene können wir hiernach so ausdrücken: Die Gesamtheit der Elementarsehnen

erster Art des Kreises fällt mit der Gesamtheit der Dreiecksseiten bei unserer Construction zusammen. Wir bezeichnen ferner als Elementarsehne zweiter Art die Verbindungslinie zweier Punkte $\frac{a'}{b'}$ und $\frac{c'}{d'}$ des Kreises von der Determinante $a'd'-b'c'=2$. Es zeigt sich, daß die Hilfsgeraden unserer Construction solche Elementarsehnen zweiter Art sind, und dass wieder die Gesamtheit der Elementarsehnen zweiter Art mit der Gesamtheit der Hülfsgeraden zusammen fällt.

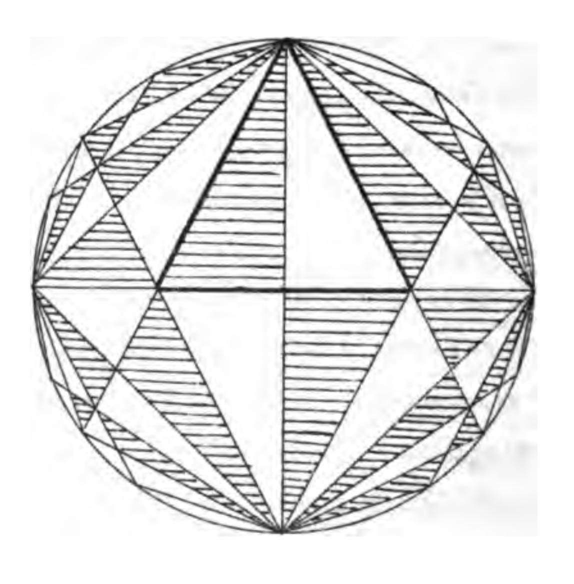
Fr. 17. I. 96. Wir bringen heute an unserer bisherigen Figur noch einen scheinbar äusserlichen Zusatz an; wir werden dadurch erreichen, dass uns dieselbe ausser der Scala der rationalen Punkte auch die Einteilung des Kreisinneren in eine unendliche Anzahl unter sich aequivalenter Parzellen zur Erscheinung bringt.

Wir bemerken nämlich, dass jedes unserer Constructionsdreiecke durch

die Hülfsgeraden in 6 Unterdreiecke geteilt wird. Diese Unterdreiecke wollen wir abwechselnd schraffiren, so daß sich jedes schraffirte Dreieck mit seinen 3 Seiten an 3 nichtschraffirte Dreiecke anlegt und umgekehrt. Es stossen dann in den „Mittelpunkten" der Constructionsdreiecke je 3 schraffirte Dreiecke zusammen, in den „Mittelpunkten" der Seiten jener Dreiecke (wenn wir so diejenigen Punkte jener Seiten bezeichnen, in welchen dieselben von den durch den gegenüberliegenden Eckpunct gehenden Hülfsgeraden geschnitten werden) je zwei und in den Ecken der Constructionsdreiecke je unendlich viele schraffirte Dreiecke zusammen. In's Besondere liefern ein gewisses schraffirtes und ein gewisses nichtschraffirtes Dreieck zusammen gerade das pg. 184 abgegrenzte reducirte Gebiet, vergl. überall die Figur der folgenden Seite.

<u>Es ist nun möglich, jedes schraffirte bez. nicht schraffirte Dreieck unserer</u>

Figur durch eine und nur durch eine Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ in den schraffirten bez. nichtschraffirten Teil des reducirten Raumes zu transformiren. Und umgekehrt gibt es zu jeder solchen Substitution ein und auch nur ein schraffirtes und nicht schraffirtes Dreieck unserer Figur, welches durch jene Substitution in den reducirten Raum verlegt wird.



Zum Beweise greifen wir irgend ein Dreieck unserer Figur heraus. Dasselbe ist ein Unterbestandteil eines der Constructionsdreiecke; eine Seite desselben fällt in eine Seite dieses Dreiecks, also in eine Elementarsehne erster Art, während seine beiden anderen Seiten

Stücke von Hülfsgeraden, also von Elementarsehnen zweiter Art sind. Es handle sich etwa um das mit einem * versehene nicht schraffirte Dreieck. (vergl. die f. Figur). Die Endpunkte der zum Dreiecke gehörigen Elementarsehne erster Art seien $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$. Die Endpunkte der beiden Elementarsehnen zweiter Art sind dann: $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\alpha+2\beta}{\beta+2\delta}$ bez. $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}$ und $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$. Andererseits ist der nichtschraffirte Teil des reducirten Raumes von der Elementarsehne erster Art $\infty, 0$ und den Elementarsehnen zweiter Art $\infty, \frac{1}{2}$ und $1, -1$ begrenzt. Wir betrachten daher die folgenden Punktepaare samt den sie verbindenden Geraden:

einerseits $\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\gamma}, & \dfrac{\beta}{\delta} \\ \dfrac{\alpha}{\gamma}, & \dfrac{\alpha+2\beta}{\gamma+2\delta}, \\ \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}, & \dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta} \end{cases}$ andererseits $\begin{cases} \infty, & 0 \\ \infty, & \frac{1}{2} \\ +1, & -1 \end{cases}$

Wir können nun unmittelbar eine lineare Transformation angeben, welche die Punkte der ersten Serie in die daneben stehenden Punkte der zweiten Serie überführt. Wir haben nämlich, wenn ω irgend einen der ersteren, ω' irgend einen der letzteren Punkte bedeutet.

$$\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}.$$

Aber mit dieser Substitution, resp. der durch sie gegebenen Vertauschung der Kegelschnittpunkte ist nach pg. 183 eine Collineation der ganzen Ebene, die den Kegelschnitt in sich überführt, notwendig verbunden, nämlich die Collineation

$$\begin{aligned} \rho a' &= \alpha^2 . a + \alpha\gamma . b + \gamma^2 . c, \\ \rho b' &= 2\alpha\beta . a + (\alpha\delta + \beta\gamma) . b + 2\gamma\delta . c, \\ \rho c' &= \beta^2 . a + \beta\delta . b + \delta^2 . c. \end{aligned}$$

Diese führt die Verbindungslinie von $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$ in die Verbindungslinie von ∞ und 0 etc., d. h. unser nicht-schraffirtes Dreieck in die nicht schraffirte Hälfte des reducirten Raumes über. Da aber jenes Dreieck ein ganz beliebiges Dreieck unserer Construction darstellt, so erhalten wir das Resultat: <u>dass jedes beliebige (schraffirte oder nicht-schraffirte) Dreieck in das (schraffirte oder nicht-schraffirte) Dreieck des reducirten Raumes durch eine Collineation unserer Gruppe verwandelt werden kann.</u> Diese Collineation ist auch eindeutig bestimmt, wie aus den hingeschriebenen Formeln hervorgeht.

Andererseits wird jede Collineation unserer Gruppe, bez. jede ω-Substitution

$$\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}$$

ein Dreieck unserer Einteilung in das entsprechende Dreieck des reducirten Gebietes (nach dem Schema von pg 210 oben) überführen. <u>Es werden</u>

also auch alle Substitutionen der Gruppe dadurch erschöpft, dass wir verlangen, alle Dreiecke der Figur in das reducirte Gebiet zu verlegen.

Wenden wir umgekehrt auf das reducirte Gebiet die Gesamtheit unserer Collineationen an, so müssen wir die Gesamtheit unserer Dreiecke erhalten. Durch diese Bemerkungen ist die Berechtigung der Benennung: reducirtes Gebiet: auf's neue dargethan. Wir erkennen nämlich:

Es ist jeder Punkt des Kegelschnittinnern einem bestimmten Punkte des reducirten Gebietes aequivalent und umgekehrt sind keine zwei Punkte des reducirten Gebietes unter sich aequivalent. Die Punkte des reducirten Dreiecks stellen also alle reducirten Formen mit $D < 0$ und jede nur einmal vor. Dieselbe Aussage können wir auch so formuliren: Das reducirte Gebiet bildet für das Kegelschnittinnere einen Fundamentalbereich der Gruppe unserer $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ Substi-

tutionen.

Die letzten Aussagen verlangen, wenn sie vollständig richtig sein sollen, noch eine schärfere Abgrenzung des reducirten Gebietes. Wir bemerken nämlich, dass unser reducirtes Gebiet, wie wir es bisher definirt haben, d. h. das Dreieck $\infty, \mathcal{E}, \mathcal{E}'$ schlechthin, gewisse Punkte, nämlich die Randpunkte enthält, welche unter sich aequivalent sind. Es entspricht dies bei unserer vorhergehenden Deduction dem Umstande, dass wir diese Randpunkte entweder dem reducirten Bereiche selbst oder einem seiner Nachbarbereiche zurechnen können. Wir betrachten die projective Beziehung $\omega' = \omega + 1$ der Kreisperipherie in sich; dieselbe führt die Punkte $\infty, -\frac{1}{2}$ des Kreises in die Punkte $\infty, +\frac{1}{2}$ über. Die Die zugehörige Collineation der Ebene bringt also die Seite $\infty\mathcal{E}$ unseres Dreiecks in die Seite $\infty\mathcal{E}'$. Die Substitution

$w' = w - 1$ bewirkt das Umgekehrte. Wir betrachten ferner die Substitution $w' = -\frac{1}{w}$, welche gleichfalls eine $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ Substitution ist. Dieselbe macht aus den Punkten $-1, +1$ des Kreises die Punkte $+1, -1$; sie führt also die Seite EE' unseres Dreiecks in sich über u. zw. in der Weise, dass die eine Hälfte FE derselben in die andere Hälfte FE' übergeht und umgekehrt. Die Randpunkte des Dreiecks sind also paarweise durch gewisse $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ Collineationen einander zugeordnet, sie sind paarweise aequivalent.

Wir deuten dieses in der Figur durch die Doppelpfeile an. Soll unser reducirtes Dreieck im präcisen Sinne des Wortes ein Fundamentalraum sein, d. h. soll es nur nicht-aequivalente Punkte enthalten, so dürfen wir demselben nur den einen Teil des Randes, etwa den zum schraffirten Dreieck gehörigen Rand hinzurechnen, während wir den anderen Teil des Randes den Nachbardreiecken zuweisen. Nach dieser Verschärfung ist jetzt der Satz ausnahmslos richtig:

dass jeder Punkt des Kreisinnern einen und nur einen aequivalenten Punkt im Fundamentalraum besitzt.

Wir werden dieselbe Verschärfung auch an der arithmetischen Definition der reducirten Formen anzubringen haben. Wir nannten eine definite Form (a, b, c) dann reducirt, wenn $|b| \leqq a \leqq c$ war. Dem Auftreten der Gleichheitszeichen in dieser Formel entspricht geometrisch, dass der bez. Punkt a, b, c auf den Rand des Fundamentalraumes rückt; er befindet sich, wenn $a = c$, auf der Geraden EE', wenn $|b| = a$ auf den Geraden ∞E oder $\infty E'$. Wenn wir also geometrisch dem reducirten Gebiete einen Teil seiner Randpunkte wegnahmen, so werden wir arithmetisch die Gültigkeit des Gleichheitszeichens unter Umständen ausschliessen müssen. Nun ist, bei unserer Annahme über die Lage des Einheitspunktes in dem beibehaltenen Teile des Randes $b > 0$, in dem fortgelassenen $b < 0$. Dementsprechend werden wir die Gleichheitszeichen in

der obigen Formel nur im Falle $b > 0$ bestehen lassen und werden jetzt die folgende schärfere Definition der reducirten Formen aufstellen: Eine Form (a, b, c) ist im Falle $b > 0$ eine reducirte Form, wenn $b \leqq a \leqq c$, im Falle $b < 0$ aber dann, wenn $|b| < a < c$ ist. Nach dieser Verbesserung unserer ursprünglichen Definition können wir den Satz (welcher übrigens nur ein anderer Ausdruck für einen Satz der vorigen Seite ist) als ausnahmslos richtig aussprechen: dass in jeder Klasse aequivalenter definiter Formen immer nur eine reducirte Form enthalten ist.

Wir kommen noch auf die Frage nach den Automorphien der definiten Formen zurück, weil uns die hierbei in Betracht kommenden Verhältnisse aus unserer Figur unmittelbar entgegentreten. Wie wir wissen, hängt das Vorhandensein der Automorphien von den Lösungen t und u der Pell'schen Gleichung

$$t^2 + \Delta u^2 = 4$$

ab, wo $-\Delta = D$ die Discriminante der

vorgelegten Form ist. Die Automorphie selbst ist dann eine Substitution

$$x = \alpha X + \beta Y$$
$$y = \gamma X + \delta Y$$

mit folgendem Coefficientenschema:

$$\begin{vmatrix} \frac{t - bu}{2} & -cu \\ au & \frac{t + bu}{2} \end{vmatrix}$$

Haben wir eine Discriminante $\Delta > 4$, so besitzt die Pell'sche Gleichung ersichtlich nur die trivialen Lösungen: $t = \pm 2$, $u = 0$, welche zu den Automorphien Anlass geben $\begin{vmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{vmatrix}$. Die Form geht also bei $\Delta > 4$ nur dann in sich über, wenn wir x und y entweder ungeändert lassen oder beide gleichzeitig im Vorzeichen vertauschen. Ist dagegen $\Delta = 4$, so giebt es ein zweites Lösungspaar der Pell'schen Gleichung, nämlich $t = 0$, $u = \pm 1$, und dementsprechend zwei weitere Automorphien. Ist endlich $\Delta = 3$, so liefert jede der vier Vorzeichencombinationen in $t = \pm 1, u = \pm 1$

eine Lösung der Pell'schen Gleichung. Zu den obigen Automorphien, die dem Lösungspaare $t = \pm 2$, $u = 0$ entsprechen, treten in diesem Falle noch 4 neue Automorphien hinzu. In den beiden letztgenannten Fällen $\Delta = 4$ und $\Delta = 3$ giebt es je nur eine Formenklasse, weil es nur eine reducirte Form giebt. Es ist dieses bez. die Form

$$x^2 + y^2 \text{ und } x^2 + xy + y^2.$$

Wir sehen nun zu, wie sich das Vorhandensein der Automorphien in unserer Figur darstellt. Zu dem Zwecke müssen wir von der Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ der Variabeln x und y zu der entsprechenden Substitution der Variabeln a, b, c übergehen. Die Substitution $\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ist natürlich in jenen, wie in diesen Variabeln die identische Substitution. Ferner bedeutet die Substitution $\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ in den Variabeln a, b, c gleichfalls die Identität, wie aus den Formeln von pg. 178 sofort einleuchtet. Daher kommt das Vorhandensein dieser zweiten

Automorphie in unserer Figur nicht zum Ausdrucke. Überhaupt ändert das gleichzeitige Umkehren der Vorzeichen in den Coefficienten der Substitution $\binom{\alpha\beta}{\gamma\delta}$ an der Collineation der Variabeln a, b, c durchaus nichts. Daher werden die 4 Automorphien im Falle $\Delta = 4$ und die 6 im Falle $\Delta = 3$ nur 2 bez. 3 verschiedene Collineationen in der Ebene der a, b, c ergeben können. Dass nun in der That 2 bez. 3 Collineationen vorhanden sind, bei denen die Form $x^2 + y^2$ bez. $x^2 + xy + y^2$ ungeändert bleibt, ersieht man aus unserer Figur. Die Form $x^2 + y^2$ wird nämlich durch den Punkt 1, 0, 1 repräsentirt, den wir in der Figur von pg. 213 mit F bezeichnet haben, die Form $x^2 + xy + y^2$ wird durch den Einheitspunkt E mit den Coordinaten 1, 1, 1 dargestellt. Im Punkte F stossen 2, im Punkte E 3 schraffirte (und ebensoviele nicht schraffirte) Dreiecke zusammen. Die Collineationen, durch welche diese 2 bez. 3 schraffirten Dreiecke in das

schraffirte Dreieck des reducirten Raumes verwandelt werden, sind die Automorphien der Form x^2+y^2 bez. x^2+xy+y^2. Das Vorhandensein und die Bedeutung der Automorphien im Falle $\Delta = 4$ und $\Delta = 3$ leuchtet also aus der Anordnung unserer Dreiecksfigur direct ein. Ebenso erkennen wir aus der Figur, dass es keine anderen Classen definiter Formen mit aussergewöhnlichen Automorphien giebt als die genannten beiden.

Do: d. 23. I. Wir ziehen jetzt auch Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$$

von der Determinante $\alpha\delta-\beta\gamma = -1$ hinzu. Auch diese haben in unserer Figur eine einfache Bedeutung. Wir betrachten zunächst die specielle Substitution

$$\omega' = -\omega,$$

welche ersichtlich die Determinante -1 besitzt. Die zugehörige Collineation der a, b, c lautet nach pg. 218:

$\varrho a' = a, \varrho b' = -b, \varrho c' = c$

und bedeutet eine gewöhnliche Spiegelung an der Mittellinie unserer Figur, eine Vertauschung von rechts und links. Das Wort Spiegelung werden wir im Folgenden jedoch in einem allgemeineren Sinne gebrauchen. Handelt es sich nicht, wie soeben um einen Durchmesser des Kreises sondern um eine beliebige Sehne desselben, so verstehen wir unter Spiegelung eine Operation, welche man in der projectiven Geometrie als harmonische Perspective bezeichnet. Dieselbe wird folgendermassen definirt: Man construire den Pol P der Sehne und ordne jedem Punkte Q der Ebene denjenigen Punkt Q' der Verbindungslinie PQ zu, welcher mit Q harmonisch liegt in Bezug auf den Pol P und den Schnittpunkt von

Q'
Q
P

P'A mit der Polaren von P. Der Pol P bildet das „Centrum" unsere Sehne die „Axe" dieser Perspective. Diese Operation stellt die projective Verallgemeinerung der gewöhnlichen Spiegelung dar und geht in jene über, wenn wir die Sehne speziell in einen Durchmesser des Kreises rücken lassen.

Wir betrachten jetzt die Gesamtheit der Substitutionen von der Determinante ± 1. Dieselben bilden eine Gruppe, welche wir im Gegensatz zu der früheren die erweiterte Gruppe nennen. Wir erhalten übrigens diese ganze Gruppe, wenn wir zu der früheren Gruppe von Substitutionen mit der Determinante +1 noch die spezielle Substitution $\omega' = -\omega$ von der Determinante −1 hinzunehmen. Denn wir können jede Substitution von der Determinante −1 durch Combination dieser speciellen mit einer Substitution von der Determinante +1 darstellen. (Der Deutlichkeit halber sei noch ausdrücklich hervorgehoben, dafs die

zugehörigen Substitutionen der a, b, c auch jetzt die Determinante $+1$ haben, denn sie ist gleich $(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$.)

Der Fundamentalbereich dieser erweiterten Gruppe besteht aus einem einzelnen schraffirten (oder nicht-schraffirten) Dreieck, etwa aus dem schraffirten Dreieck des reducirten Raumes, in demselben Sinne, wie bei unserer früheren Gruppe der Fundamentalbereich von dem Doppeldreiecke des reducirten Raumes gebildet wurde. In der That zeigt sich, dass jeder Punkt des Kreisinnern durch eine Operation unserer Gruppe in das schraffirte Dreieck des reducirten Raumes verlegt werden kann, und dass keine zwei Punkte des schraffirten Dreiecks unter sich aequivalent sind. Man kann nämlich erstlich jeden Punkt durch eine $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ Substitution von der Determinante $+1$ in den reducirten Raum überhaupt überführen. Fällt er dabei in das nichtschraffirte Dreieck, so bringt man ihn durch die

Operation $w' = -w$ in das schraffirte Dreieck hinein. Fällt er in das schraffirte Dreieck, so ist das Gewünschte ohnedies erreicht. Dass auch keine zwei Punkte des schraffirten Dreiecks unter sich aequivalent sein können, ergibt sich aus der Erzeugung der erweiterten Gruppe mittelst der Operationen von der Determinante +1 und der speciellen Operation $w' = -w$, deren Wirkung uns einzeln bekannt ist.

Die arithmetische Definition des neuen Fundamentalbereichs ist diese:

$$0 \leqq b \leqq a \leqq c$$

(wo überall die Gleichheitszeichen mitzählen).

Wir können jetzt die Construction unserer Figur nach einem neuen Princip beschreiben, indem wir die Operation der Spiegelung in dem oben festgestellten Sinne an die Spitze stellen. Wir gehen von dem schraffirten Dreieck des reducirten Raumes aus und bemerken, daß die 3 anliegenden nicht-schraffirten Dreiecke aus diesem durch

Spiegelung an der gemeinsamen Dreieckseite entstehen. Bei zweien dieser Dreiecke ist das ohne weiteres klar, weil es sich bei ihnen um eine gewöhnliche Spiegelung handelt. Bei dem dritten Dreiecke, wo die Spiegelung als harmonische Perspective erklärt werden muss, folgt das Behauptete aus der Entstehung unserer Figur durch harmonische Construction. Wir betrachten sodann eines dieser drei nicht schraffirten Dreiecke und die ihm anliegenden drei schraffirten. Auch diese gehen wegen der fundamentalen Eigenschaften unserer Figur aus dem nicht-schraffirten durch Spiegelung an den gemeinsamen Dreiecksseiten hervor. Dasselbe gilt überhaupt für jedes Dreieck unserer Figur und die dasselbe umgebenden drei Nebendreiecke, weil die Spiegelung eine projective Operation ist und weil jedes Dreieck unserer Figur mit jedem anderen projectiv verwandt ist. Wir können daher die

ganze Figur dadurch successive entstehen lassen, dass wir jedes einzelne Elementardreieck, welches wir erhalten, immer auf's Neue an seinen Seiten spiegeln. Da alle Dreiecksseiten, zu denen wir so gelangen, Elementarsehnen sind, d.h. rationale Punkte $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$ der Kreisperipherie verbinden, so werden alle unsere Spiegelungen ganzzahlige Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ u. zw. natürlich ganzzahlige Substitutionen von der Determinante -1. Speziell ist dabei $\alpha + \delta = 0$. Von hier aus bestätigt man sofort, dass jeder Punkt des Kegelschnittinneren mit jedem Punkte des schraffirten Elementardreiecks durch eine ganzzahlige Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ aequivalent ist, welche die Determinante $+1$ hat, wenn es sich um einen Punkt eines schraffirten Dreiecks, die Determinante -1, wenn es sich um einen Punkt eines nicht-schraffirten Dreiecks handelt. Die fragliche Substitution von der Determinante $+1$ oder -1 erhält man einfach durch zusammen-

setzung einer geraden oder ungeraden Anzahl von Einzelspiegelungen, durch welche man von dem Elementardreieck des reducirten Gebietes zu demjenigen Dreieck hingelangt, welchem der gerade betrachtete Punkt angehört.

Wir fragen auch bei dieser erweiterten Gruppe nach den Automorphien. Zu dem Ende denken wir uns zu einem Punkte a, b, c die Gesammtheit seiner im Sinne der erweiterten Gruppe aequivalenten Punkte, d. h. das System seiner Spiegelpunkte hinzu. (Man denke an die Anordnung der Spiegelbilder bei einem Kaleidoskop.) Eine Automorphie liegt dann und nur dann vor, wenn zwei Punkte dieses Systems zusammenrücken. Da aber je zwei Spiegelpunkte durch eine Dreieckseite getrennt werden, findet dieses nur dann statt, wenn der Punkt a, b, c in einer Dreiecksseite gelegen ist. In diesem Falle bleibt

unser Punkt bei zwei Operationen der erweiterten Gruppe ungeändert, nämlich bei der identischen Operation und bei der Spiegelung an der betr. Dreiecksseite. Ein spezieller Fall hiervon ist es, wenn der Punkt in eine Dreiecksecke hineinrückt. Alsdann rücken aus dem System der aequivalenten Punkte 4, 6 oder gar unendlich viele Punkte in dieselbe Ecke hinein, je nachdem es sich um eine Ecke handelt, welche mit den Punkten, J, E oder ∞ des reducirten Gebietes (vergl pg. 213.) aequivalent ist. Dementsprechend bleibt ein solcher Punkt bei 4, 6 oder unendlich vielen Operationen der erweiterten Gruppe ungeändert.

Wollen wir die entsprechenden Resultate für quadratische Formen aussprechen, so müssen wir berücksichtigen, dass die Anzahl der Automorphien durch Hinzunahme der Substitution $x = -x'$, $y = -y'$, welche auf unsere Figur keine

Wirkung ausübt, sich verdoppelt. Daraufhin formuliren wir die folgenden Sätze:

1. Eine beliebige binäre definite Form geht durch zwei Automorphien der erweiterten Gruppe in sich über, nämlich durch die identische Substitution und durch die Operation $x = -x'$, $y = -y'$!

2. Wenn der repräsentirende Punkt in einer Elementarsehne unserer Figur liegt, so bleibt die Form bei 4 Operationen ungeändert.

3. Wenn der repräsentirende Punkt in eine Dreiecksecke rückt, so wird die Form durch 8 oder durch 12 oder auch durch unendlich viele Operationen der erweiterten Gruppe in sich transformirt.

Wir stellen noch die arithmetischen Kriterien für das Vorhandensein aussergewöhnlicher Automorphien zusammen, wobei wir jedoch nur von der Formenclasse sprechen und diese durch ihre reducirte Form repräsentiren. Hinsichtlich des Satzes 2) haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der reducirte Re-

präsentant der Klasse einer Elementarsehne erster oder zweiter Art angehört.

Im ersten Falle ist

$$b = 0,$$

im zweiten

$$b = a \quad \text{oder} \quad a = c.$$

Der zweite Fall zerlegt sich hiernach noch in zwei Unterarten a) und b). Um dieselben in algemeingültiger Weise von einander zu sondern, bemerke man, dass jede Elementarsehne zweiter Art zwei Dreiecksecken E trägt,

welche dieselbe in ein inneres und zwei äussere Stücke zerlegt. Im Falle a) liegt der reducirte Punkt auf einem äusseren, im Falle b) auf einem inneren Stücke der Elementarsehne zweiter Art. Die Aussagen des Satzes 3) greifen Platz, wenn der repräsentirende Punkt in eine Ecke unserer Dreiecksteilung hineinrückt. Lassen wir die auf der Peripherie gelegenen Ecken ausser Acht, weil wir doch von definiten Formen sprechen

und diese im Innern des Kreises ihre Darstellung finden, so haben wir wiederum zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Falle ist die reducirte Form characterisirt durch

$b = 0$, $a = c$ (d.h. den Punkt F)

im zweiten Falle durch

$a = b = c$ (den Punkt E).

Auch die arithmetische Theorie der quadratischen Formen beschäftigt sich mit den soeben aufgezählten Ausnahmeformen. Sie werden dort <u>Anceps-Formen</u> oder auch <u>Ambige Formen</u> genannt. In unserem Sinne bedeutet das Wort Anceps eben dieses, daß der die Anceps-Form repräsentirende Punkt zwei Fundamentalbereichen zugerechnet werden kann.

Da die Anceps-Formen für die spätere Theorie von besonderer Wichtigkeit sind, wollen wir ihre Eigenart noch durch die zugehörigen Gitter charakterisiren, wie bereits kurz vor Weihnachten begonnen wurde.

Entsprechend der allgemeinen Construction der Gitter, wonach bei definiten Formen die Seiten des Elementarparallelogrammes $\sqrt{a}$ und $\sqrt{c}$, der Winkel zwischen diesen $\tau = \arccos \frac{b}{2\sqrt{ac}}$ betragen sollte, sind die Anceps-Klassen der ersten Art (mit dem Repräsentanten $b = 0$) dadurch characterisirt, dass sie ein Rechteckiges Punktgitter besitzen. Wir können nämlich ihr Gitter, indem wir eine geeignete Form, eben die reducirte Form mit $b = 0$, also $\tau = 90°$ der Klasse, herausgreifen, aus einzelnen Rechtecken aufbauen.

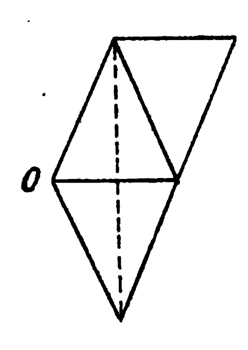
0

Ferner sind die Anceps-Klassen der zweiten Art dadurch ausgezeichnet, dass ihr Punktgitter durch ein System von Rhomben erzeugt werden kann.

0

Liegt nämlich die erste Unterart mit dem Repräsentanten $a = c$ vor, so liefert die reducirte Form der Klasse direkt ein Parallelgitter mit

rhombischen Elementarparallelogrammen.



Liegt die zweite Unterart vor ($a = b$), so ist für die reducirte Form $\sqrt{c} \cdot \cos \gamma = \frac{\sqrt{a}}{2}$, so dass die eine Hälfte des Elementarparallelogramms ein gleichschenkliges Dreieck wird. Man stellt dann durch eine Umordnung der Gitterstäbe, wie aus der nebenstehenden Figur ersichtlich ist, aus dem Parallelgitter der reducirten Form wiederum ein rhombisches Gitter her. Diese beiden Unterarten können noch durch den bei O gelegenen Winkel der Rhomben unterschieden werden. Im ersten Falle ($a = c$) besteht nach der Definition unseres a, b, c-Coordinatensystems für die Coefficienten der reducirten Form die Ungleichung $b < a$. Daher haben wir in dem rhombischen Gitter der reducirten Form $\cos \gamma = \frac{b}{2a} < \frac{1}{2}$ oder $\gamma > 60°$. Im zweiten Falle ($a = b$) gilt für die Coefficienten der reducirten Form die Unglei-

chung $a < c$. Mithin wird in dem Gitter der reducirten Form $\cos \varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}} < \frac{1}{2}$ oder $\varepsilon > 60°$. In dem aus dem reducirten Gitter erzeugten rhombischen wird der Winkel bei 0 gleich 2ε oder $> 120°$. Der zweite Winkel im Rhombus ergänzt diesen ersten selbstverständlich zu 180°. Wir können daher sagen: *die Winkel der Rhomben unterscheiden sich im ersten Falle von einem Rechten um weniger, im zweiten Falle um mehr als 30°.*

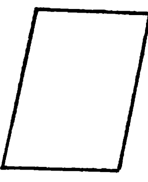
Die höheren Ausnahmefälle, denen 8 und 12 Automorphien entsprechen, ordnen sich in die aufgezählten Gitter als Grenzfälle ein. So bildet diejenige Klasse, deren reducirte Form die Coefficienten $a = b = c$ hat, den Übergang zwischen unsern beiden Unterarten von rhombischen Gittern. Wir haben daher hier einen Rombus mit einem Winkel von 60° als Elementarparallelogramm. Das zu dieser Klasse gehörige Gitter bezeichnen wir als *gleichseitiges*, weil es durch Aneinanderlagerung von

gleichseitigen Dreiecken erzeugt werden kann. Andererseits bildet der Fall $a = c$, $b = 0$ den Uebergang von den rhombischen zu den rechteckigen Gittern. Das Elementarparallelogramm dieses Falles ist daher gleichzeitig ein Rhombus und ein Rechteck, d. h. es ist ein Quadrat. Demnach wird das Gitter dieser Klasse als quadratisches Gitter zu bezeichnen sein.

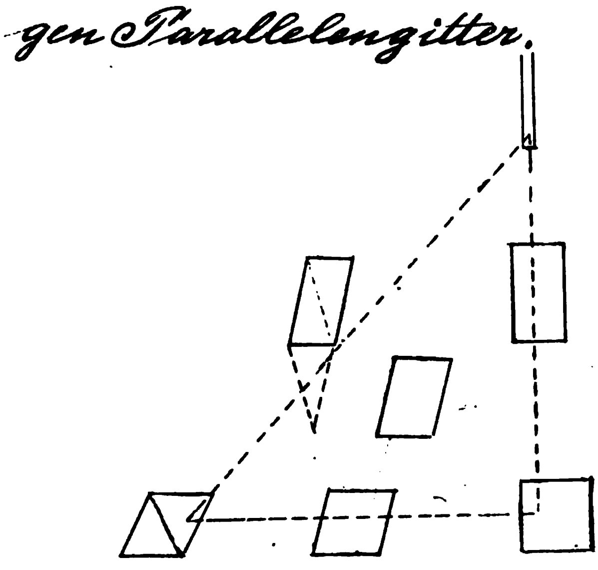
Wollen wir schliesslich auch noch die dritte Ecke unseres Fundamentalbereichs $a = 0$, $b = 0$ berücksichtigen, so haben wir für diese ein ausgeartetes Elementarparallelogramm mit der Seite $\sqrt{a} = 0$ zu verzeichnen. Übrigens müssten wir dasselbe von rechtswegen unendlich lang zeichnen, weil sein Inhalt die endliche Grösse $-(b^2 - 4ac)$ betragen soll.

Endlich gehören zu den allgemeinen quadratischen Formen, deren repräsentirende Punkte im Innern des Fundamentalbereiches liegen, Gitter von denen wir auf Grund der

Ungleichungen $0 < b < a < c$ nur aussagen können, dass ihr Winkel $C > 60°$ ist, und dass die Seite Vc jedesmal länger ist als die Seite Va.



Fragen wir die den einzelnen Stellen des Fundamentalbereiches zugehörigen Parallelogramme in dem folgenden Schema andeutungsweise ein, erhalten wir eine Übersicht über den continuirlichen Zusammenhang zwischen der Lage der Punkte a, b, c im Fundamentalbereiche und der Gestalt der zugehörigen Parallelengitter.



Indem wir unsere Betrachtung der definiten Formen beschliessen, betonen wir nochmals die Schönheit unserer Dreiecksconstructionen, welche die ganze Theorie der Aequivalenz in sich enthalten. Diese Schönheit ruht natürlich auf dem hohen Grade der Symmetrie, welche die Figur besitzt, d.h. auf der grossen Zahl von Transformationen, welche dieselbe in sich selbst überführen. Man darf wohl sagen, daſs die moderne Geometrie keine Figur aufgedeckt hat, welche einen so weitgehenden Gedankeninhalt besässe. Über die Zahlentheorie hinaus beherrscht unsere Figur die Theorie der elliptischen Modulfunctionen und leitet von hier aus zu den automorphen Functionen über, in deren Theorie ähnliche (verallgemeinerte) geometrische Constructionen Platz greifen. Auch auf höhere Gebiete der Zahlentheorie lässt sich unser geometrisches Verfahren verallgemeinern. Deutet man beispielsweise die Coefficienten von quadra-

tischen Formen mehrere Veränderlicher als homogene Coordinaten in einem Raume von genügend hohen Dimensionenzahl, so wird sich als Ort der definiten Formen ein Gebiet abgrenzen lassen, welches sich entsprechend den unimodularen ganzzahligen Substitutionen der ursprünglichen Veränderlichen gleichfalls in charakteristischer Weise in Parzellen zerlegt. Man kann geradezu sagen, dass ein grosser Theil der Zahlentheorie in dem Studium der Raumeinteilungen besteht oder bestehen sollte, welche irgend welchen discontinuirlichen Transformationsgruppen entsprechen. Hierzu bieten die folgenden Erläuterungen über Formen mit $D = 0$ und $D > 0$ noch wesentliche Gesichtspunkte.

3. Die Formen mit $D = 0$ und die Punkte auf dem Kegelschnitt.

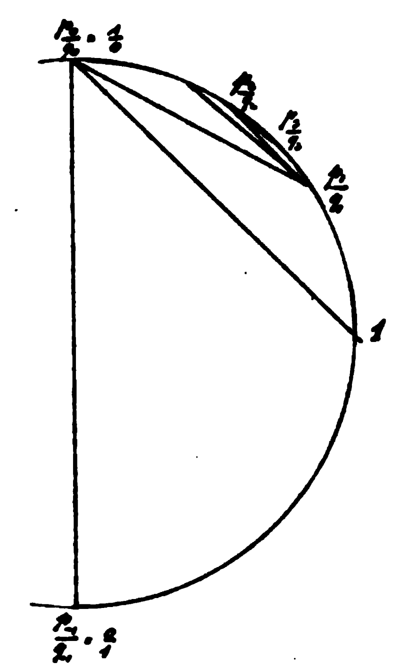
Wir gehen nunmehr auf den Rand unseres Kegelschnitts, indem wir

die Betrachtung der zerfallenden quadratischen Formen von der Discriminante $D = 0$ beginnen.

Man stellt sich das Aequivalenzproblem wesentlich einfacher. Was zunächst die rationalen Punkte betrifft, so wissen wir von vornherein, dass irgend zwei Punkte mit rationalem Parameter ω und ω' unter sich allemal aequivalent sind. Handelt es sich dagegen um zwei irrationale Punkte, so haben wir nach dem Früheren ω und ω' in einen Kettenbruch zu entwickeln. Die Punkte sind dann und nur dann aequivalent, wenn die zugehörigen Kettenbrüche von einer gewissen Stelle ab lauter gleiche Teilnenner μ aufweisen.

Das geometrische Gegenbild der Kettenbruchentwickelung auf der Peripherie unseres Kreises ist uns von pag. 202 her bekannt. Dieselbe bedeutet die successive Construction von Elementarsehnen erster Art, welche von den Punkten 0 und ∞ beginnend je zwei

Näherungspunkte der Kettenbruchentwik=
kelung verbinden. Dabei gehen von dem
Näherungspunkte $\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}}$ μ_r Elementarseh=
nen aus, welche nach den $\mu_r - 1$ folgen=
den Näherungspunkten und dem $(r+1)^{ten}$
Hauptnäherungspunkte führen. Wir haben
in dieser Weise die Kettenbruchentwik=
kelung allerdings nur für ein ratio=
nales ω gedeutet. Für ein irrationa=
les ω bleibt die Sache aber gerade
so, mit dem einzigen Unterschiede, dass
wir hierbei den Punkt ω niemals mit
einer Sehne wirklich erreichen, sondern
ihm nur mehr und mehr nahe kom=
men. Die so entstehende Figur hat
in der Hauptsache die Gestalt einer
nicht abbrechenden Zickzack-Linie,
welche je die Hauptnäherungspunk=
te der Kettenbruchentwickelung ver=
bindet. In den Ecken der Zickzack=
linie laufen noch je $\mu_r - 1$ Geraden
fächerförmig zusammen. Messen
wir die Grösse der Eckenwinckel et=
wa durch die Anzahl dieser Gera=
den, so können wir die Bedingung



für die Aequivalenz zweier irrationaler Punkte ω und ω' so formuliren: Es müssen in den zugehörigen Zickzack hinein von einer gewissen Stelle ab die Ecken gleich gross werden. Die rationalen Punkte bilden zusammen eine Klasse aequivalenter Punkte. Dieselben liegen, wie aus der Construction der rationalen Scala hervorgeht, auf dem Kegelschnitte überall dicht. Dasselbe gilt auch von jeder Klasse irrationaler ω. Wir behaupten nämlich: *In jedem beliebig klein gegebenen Stücke der Kreisperipherie liegen immer Punkte, welche zu einem gegebenen ω aequivalent sind.* In der That liegen in dem gegebenen Stücke sicher zwei Punkte, welche Endpunkte einer Elementarsehne erster

Art sind. In dieser Elementarsehne können wir von der Sehne $0\,\infty$ ausgehend durch eine Zickzack-Linie hingelangen. Setzen wir von da aus die Linie nach dem durch die Kettenbruchentwickelung von ω angezeigten Schema fort, indem wir die Grösse der folgenden Ecken nach den Teilnennern μ_ν von ω bestimmen, so nähern wir uns hierdurch einem Punkte ω', welcher mit ω aequivalent ist und welcher unserer Construction zufolge innerhalb des vorgegebenen Stückes der Kreisperipherie liegt. Hiermit ist gezeigt, daß auch die Punkte der sämtlichen irrationalen Klassen von ω-Werten auf dem Kegelschnitte überall dicht liegen.

In diesem Gewirr von aequivalenten Punkten kann sich die geometrische Anschauung nicht mehr zurecht finden, nur die arithmetische Behandlung wird hier die Frage der Aequivalenz entscheiden können. Die Dinge liegen also auf dem Rande des fundamentalen Kegelschnittes

gerade umgekehrt, wie im Innern. Während dort die arithmetischen Verhältnisse im geometrischen Bilde sehr übersichtlich wurden, versagt hier die geometrische Anschauung völlig – ein Beispiel dafür, wie sich der geometrische und der arithmetische Standpunkt wechselweise ablösen müssen. Vielleicht kann man sagen: die geometrische Auffassung ergibt überall da aber auch nur da Erleichterungen, wo es sich um arithmetische <u>Ungleichungen</u> handelt.

Wir knüpfen hieran eine Bemerkung, welche für die Auffassung der Grupppeneigenschaft von principieller Bedeutung ist. Wie wir sahen, hat auf dem Rande des Kegelschnittes unsere Gruppe der $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ Substitutionen nirgends einen Bereich, in dem sie discontinuirlich ist. Beachtet man nur dieses, so möchte man unsere Gruppe für continuirlich halten. Das ist sie aber keineswegs, denn im Innern des Kegel-

schnittes besitzt sie ihre wohl abgegrenzten Fundamentalbereiche. Um diese Verhältnisse kurz bezeichnen zu können, werden wir sagen: Unsere Gruppe ist im Innern des Kegelschnitts eigentlich -, auf dem Rande uneigentlich - discontinuirlich, womit aber nichts über die Gruppe als solche, sondern nur etwas über ihr Verhalten in diesem Gebiete ausgesagt sein soll. Die Gruppe als solche ist discontinuirlich schlechtweg.

4. Die indefiniten Formen mit $D>0$ und die Punkte ausserhalb des Kegelschnittes.

Es bleiben die indefiniten Formen mit $D>0$ zu behandeln, denen das Aeussere des Kegelschnittes zukommt. Wir fragen auch hier zunächst nach dem reducirten Raume. Die Definition der reducirten Formen (A, B, C) war diese: $A>0$, $C<0$. Des genaueren teilten wir die reducirten Formen in folgende Un-

terabteilungen ein

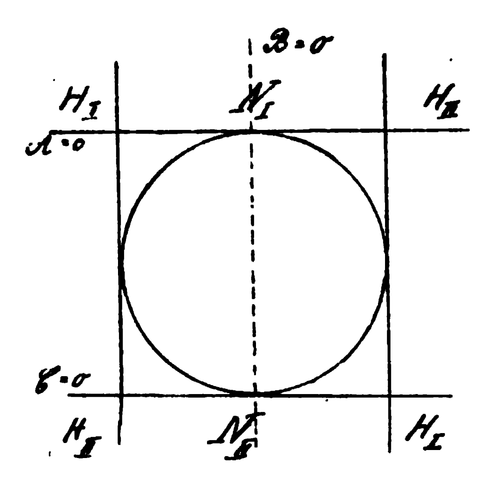
Hauptreduc. I. Art.	$A+B+C<0,$	$A-B+C>0.$
" II. Art.	$>0,$	$<0.$
Nebenreduc. I. Art.	$<0,$	<0
" II. Art	$>0,$	>0

Wurzeln λ von $A\lambda^2+B\lambda+C=0$:

Wir bemerken, dass die hiermit gegebene Definition der reducirten Formen einigermassen im Widerspruch steht mit unserer geometrischen Darstellung, in welcher nur die Verhältnisse $A:B:C$ zum Ausdruck kommen, während es in den vorstehenden Ungleichungen auf die absoluten Werte der A, B, C ankommt. Wir characterisiren die reducirten Formen daher lieber durch die (jetzt natürlich reellen) Wurzeln, welche sich beim

Nullsetzen der Form ergeben, sagen wir durch die Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung $A\lambda^2 + B'\lambda + C = 0$. Durch die relative Lage dieser Wurzeln gegenüber den Werten $-1, 0, +1$ sind, wie früher hervorgehoben, unsere Unterabteilungen gleichfalls unterschieden. Diese Lage ist in dem obigen Schema pag 245 dargestellt. Da λ_1, λ_2 die Parameter der Punkte bedeuten, in welchen die Tangenten vom Punkte A, B, C den Kreis berühren, so kann man daraufhin die resp. Gebiete für unsere 4 Arten reducirter Formen bestimmen. Zunächst ist klar, dass reducirte Formen überhaupt oberhalb der oberen und unterhalb der unteren horizontalen Tangente des Kreises gelegen sind. Im Uebrigen beschreibt sich die Verteilung der reducirten Formen am Einfachsten, wenn man das von den horizontalen und verticalen Tangenten begrenzte vollständige Vierseit betrachtet. Dasselbe teilt die Ebene in 4 Dreiecke und 3 Vierecke. <u>Von diesen werden</u>

2 Vierecke durch die Hauptreducirten erster und zweiter Art, zwei Dreiecke durch die Nebenreducirten erster und zweiter Art umgenommen, wie in der Figur näher angegeben ist.



Hier fällt zunächst in 's Auge, daß das Gebiet der reducirten Formen gewissermassen einen viel grösseren Teil des Gesamtgebietes der indefiniten Formen einnimmt, als das reducirte Gebiet im Falle der definiten Formen that. Dafür gilt in dem jetzigen reducirten Bereiche nicht mehr der Satz, daß keine zwei Punkte derselben unter sich aequivalent sind, vielmehr gehört zu jeder reducirten Form noch eine unendliche Kette aequi-

valenter reducirter Formen hinzu, eine Kette, welche sich nur im Falle commensurabler A, B, C mit einer endlichen Gliederzahl (der Gliederzahl in der Periode der reducirten Formen) schliesst.

Unsere erste Aufgabe wird nun sein, die zu einem reducirten Punkte unserer Figur (oder auch die zu irgendwelchem Punkte) gehörige Kette durch geometrische Construction zu ermitteln. Dabei stützen wir uns auf einen wichtigen Gedanken, welcher von Hermite zuerst algebraisch ausgesprochen ist (in Crelle Bd. 41, 1851) und der später in's Geometrische übersetzt worden ist (vergl. Modulfunctionen Bd I pg. 256, ferner die wiederholt genannte Abhandlung von Hurwitz in Math. Annal. Bd. 45). Hermite geht davon aus, dass die Reduction der definiten Formen bekannt ist; er spielt nun die Aufgabe für die indefiniten Formen in das Gebiet der definiten Formen hinüber, indem er jeder indefiniten Form

definite Formen in geeigneter Weise covariant zuordnet, d.h. in solcher Weise das die Beziehung zwischen der gegebenen Form und den zugeordneten durch die Substitutionen $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ nicht gestört wird.

Do. d. 30. I. 96. Um diese covariante Beziehung naturgemäss zu entwickeln, bemerken wir, daß die einzelne quadratische Form $f = (a, b, c)$ als einzige Invariante ihre Discriminante $b^2 - 4ac$ besitzt, welche bei Substitutionen von der Determinante ± 1 völlig ungeändert bleibt. Handelt es sich darum eine invariante Beziehung zwischen 2 quadratischen Formen $f = (a, b, c)$ und $f' = (a', b', c')$, also eine simultane Invariante der beiden Formen aufzustellen, so betrachten wir das Büschel der Formen $f + \lambda f'$. Bilden wir die Discriminante einer beliebigen Form des Büschels:

$$(b+\lambda b')^2 - 4(a+\lambda a')(c+\lambda c'),$$

so muss dieselbe invarianter Natur

sein, u. zw. bei beliebigen Werten von λ. Es müssen also auch die Coefficienten der nach λ geordneten Discriminante

$$(b^2-4ac)+2\lambda(bb'-2ac'-2a'c)+\lambda^2(b'^2-4a'c')$$

Invarianten werden. Der Coefficient von 1 und λ^2 liefert nichts Neues, der Coefficient von 2λ aber giebt die gemachte simultane Invariante der Formen f und f', nämlich

$$bb'-2ac'-2a'c.$$

Es sei nun (a', b', c') die gegebene indefinite Form. Wir ordnen ihr diejenigen definiten Formen (a, b, c) zu, welche mit ihr eine verschwindende simultane Invariante haben. Wir sind dann sicher, dass, bei einer Transformation der Form (a', b', c') mittelst einer $\binom{\alpha\ \beta}{\gamma\ \delta}$ Substitution, der transformirten indefiniten Form in demselben Sinne diejenigen definiten Formen entsprechen, welche durch jene Transformation aus den Formen

(a, b, c) hervorgehen.
Geometrisch bedeutet diese Zuordnung nichts anderes, als den <u>Uebergang von dem Pole (a'b'c') zu seiner Polaren</u>, oder genauer gesagt zu seiner „Polarsehne" indem nämlich von der Polaren nur dasjenige Stück betrachtet wird, welches definite Formen trägt, welches also im Innern des fundamentalen Kegelschnitts enthalten ist. Hiermit zeigt sich denn auch, dass es wirklich definite Formen der gewollten Art gibt. Die obige algebraische Definition hat jedoch vor der geometrischen, den Vorzug voraus, dass sie die Verallgemeinerungsfähigkeit des Ansatzes auf höhere Fälle besser hervortreten lässt.

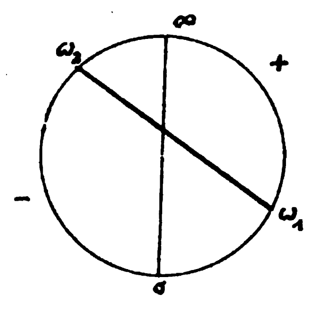
a', b', c'

Durch das Hermite'sche Princip wird in die Zahlentheorie ein Begriff

eingeführt, der ihr sonst fremd ist, nämlich der Begriff der stetigen Zahlenreihe. Statt des einzelnen Zahlentripels (a', b', c') wird eine stetige Folge von Zahlen (a, b, c), statt des einzelnen Punktes ein geometrischer Ort von Punkten substituirt. In diesem Sinne überschrieb Hermite seine oben genannte Arbeit: Introduction des variables continues dans la théorie des nombres.

Wir haben jetzt unsere früheren Resultate hinsichtlich der Reduction der indefiniten Formen in die Vorstellungen des neuen geometrischen Bildes zu übersetzen. Wir fragen zunächst: Wie liegen die Polarsehnen, welche zu den reducirten Formen gehören? Die Bedingung für die reducirten Formen hiess $A > 0$, $C < 0$. Nun ergiebt $A\omega^2 + B\omega + C$ gleich Null gesetzt die Berührungspunkte ω_1, ω_2 der Tangenten vom Punkte $A : B : C$ und gleichzeitig die Endpunkte der Polarsehne. Die Punkte ω_1, ω_2 zerlegen die Kreisperipherie in 2 Teile.

In einem derselben ist $Aw^2 + Bw + C$ positiv, im anderen negativ. Wir bemerken, dass durch die Lage der Polarsehne über das Vorzeichen von $Aw^2 + Bw + C$ noch nichts ausgesagt wird. Unser geometrisches Bild ist aus diesem Grunde noch unvollständig, und zwar gerade in einer Hinsicht, die für die Reductionstheorie wesentlich ist. Wir können unser geometrisches Bild aber leicht vervollständigen, indem wir dem einen Abschnitte der Kreisperipherie, in welchem $Aw^2 + Bw + C > 0$ ist, das Zeichen +, dem andern das Zeichen − hinzusetzen, wie beistehend geschehen.

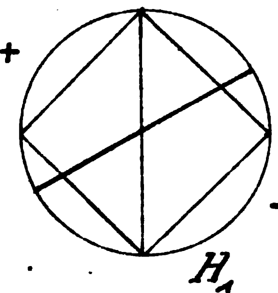


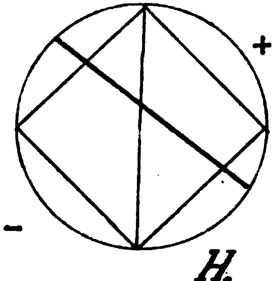
Alsdann zeigt unsere Figur nicht nur die Lage des Punktes $A : B : C$, sondern auch das Vorzeichen von A und C an. Es wird beispielsweise $C < 0$ sein, wenn der Punkt $w = 0$ in dem negativen Segmente der Kreisperipherie liegt; denn für $w = 0$ reducirt sich $Aw^2 + Bw + C$

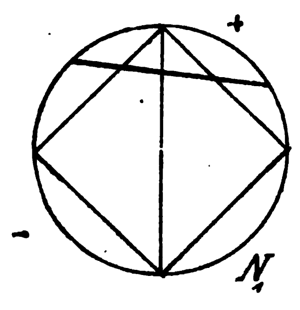
auf $\mathfrak{C}$. Es wird ferner $\mathfrak{A} > 0$ sein, wenn der Punkt $\omega = \infty$ in dem positiven Segmente enthalten ist; denn für $\omega = \infty$ stimmt das Vorzeichen von $\mathfrak{A}\omega^2 + \mathfrak{B}\omega + \mathfrak{C}$ mit dem von $\mathfrak{A}$ überein. Berücksichtigen wir dieses, so lautet die Bedingung des Reducirtseins als Eigenschaft der Polarsehne ausgesprochen folgendermassen: Es muss der Punkt ∞ im positiven, der Punkt 0 im negativen Segmente liegen. Daraus folgt, dass die zu einer reducirten Form gehörige Polarsehne jedenfalls die Mittellinie $(0\ \infty)$ unserer Figur schneiden wird.

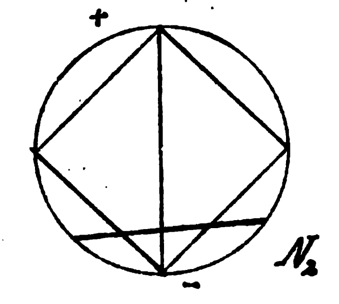
Im Uebrigen unterscheiden wir noch Haupt- und Nebenreducirte und Reducirte erster und zweiter Art. In der Figur kommt dieses darauf hinaus, dass wir die Polarsehnen je nach ihrer Lage gegen gewisse Elementarsehnen charakterisiren. Betrachten wir nämlich die Tabelle von pg. 245, so beruht die Einteilung der Reducirten auf dem Vorzeichen von $\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, also auf dem Vorzeichen des Ausdrucks

$A\omega^2 + B\omega + C$ für $\omega = +1$ und $\omega = -1$. Geometrisch gesprochen kommt es also darauf an, ob die Punkte $+1$ und -1 der Kreisphärie im positiven oder negativen Segmente liegen. Wir verbinden diese Punkte mit 0 und ∞ und erhalten ein dem Kreise eingeschriebenes Quadrat. Im Anschluss an dieses lässt sich der Unterschied zwischen Haupt- und Nebenreducirten einfach so aussprechen: <u>Die Polarsehnen von Hauptreducirten treffen das Quadrat in zwei gegenüberliegenden Seiten, die Polarsehnen von Nebenreducirten in zwei bei 0 oder ∞ zusammenstossenden Seiten.</u> Die vollständige Unterscheidung ergiebt sich aus den folgenden Figuren, deren Richtigkeit ein Vergleich mit der Tabelle von pg. 245 lehrt:



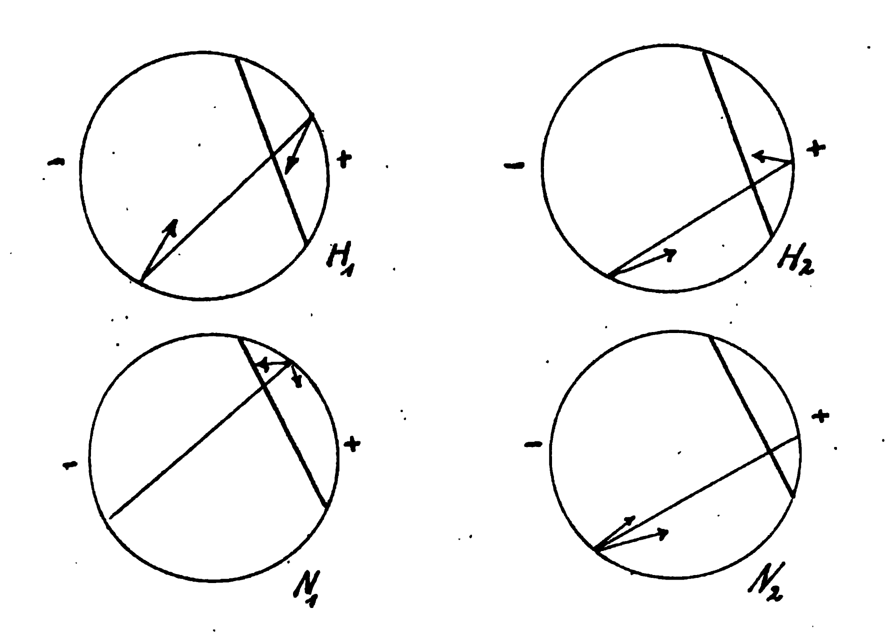






Weiter untersuchen wir die Lage einer (nicht notwendig reducirten) Polarsehne gegen die Gesamtheit der Elementarsehnen erster Art. Wir greifen zunächst irgend eine Elementarsehne heraus, welche von unserer Polaren geschnitten wird. An diese Elementarsehne legen sich nach der einen und anderen Seite hin je ein Constructionsdreieck an, dessen beide weitere Seiten wieder von Elementarsehnen gebildet werden. Von diesen beiden Seiten der benachbarten Constructionsdreiecke wird je eine durch unsere Polarsehne geschnitten. Wir markiren diese Seite im einen und anderen Dreiecke und nennen sie die zu der ersten Elementarsehne benachbarten

Sehnen. <u>Jede Elementarsehne hat in diesem Sinne einen rechten und einen linken Nachbar.</u> Nach der Lage dieser Nachbarn gegen die ursprüngliche Elementarsehne unterscheiden wir 4 Fälle, die wir im Folgenden schematisch verzeichnen:



War unsere Polarsehne nicht reducirt, so ist es jetzt leicht eine Transformation anzugeben, die sie zu einer reducirten macht. Unsere erste Elementarsehne hat zu Endpunkten gewis-

se rationale Punkte der Kreisperipherie, welche $\frac{\alpha}{\gamma}$ und $\frac{\beta}{\delta}$ heissen mögen, u. zw. sei $\frac{\alpha}{\gamma}$ derjenige Endpunkt, welcher im positiven Segmente befindlich ist. Wir nehmen dabei die Vorzeichen so, dass $(\alpha\delta-\beta\gamma)=+1$ wird. Nun verwandelt die Substitution $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ diese Elementarsehne in die Mittellinie der Figur u. zw., so dass ihr positives Ende in den Punkt ∞ übergeht. Gleichzeitig verwandelt sie die dritten Ecken der anstossenden Dreiecke in die Punkte $+1$ und -1. Unsere Transformation bringt also unsere Polarsehne in eine Lage, in welcher sie die Mittellinie schneidet, in welcher sie also eine reducirte Sehne ist. U. zw. entstehen aus unseren vier letzten Figuren bei der Transformation vier Figuren, welche hinsichtlich der Lage der Polarsehne gegen das Sehnenviereck $\infty, +, 0, +1$ mit den vier vorletzten Figuren identisch sind. Es liefern also unsere vier Figuren bei der gedachten Transformation bez. eine Hauptreducirte

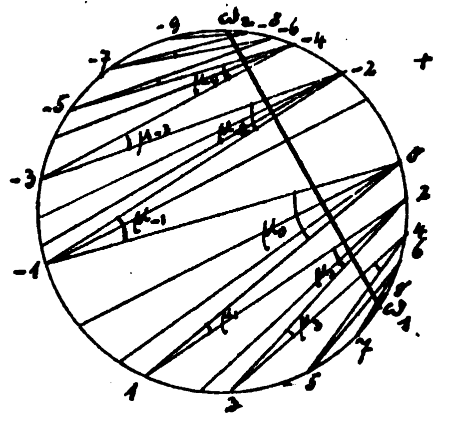
erster oder zweiten Art etc., wie durch die beigefügten Zeichen H_1, H_2, N_1, N_2 angedeutet ist.

In derselben Weise, wie wir soeben zu einer ersten Elementarsehne nach rechts und links einen Nachbar hinzuconstruirt haben, können wir diesen letzteren je einen weiteren Nachbar zugesellen. So fortfahrend bekommen wir eine ganze Kette von Elementarsehnen, durch welche unsere Polarsehne hindurchzieht. Die Kette wird nur dann eine endliche sein, wenn die Polarsehne in rationalen Punkten endigt, im anderen Falle wird sie beiderseits unbegrenzt sein.

Wir unterscheiden in unserer Sehnenkette noch Hauptsehnen und Nebensehnen. Die Hauptsehnen sind durch die Figuren H_1 und H_2, die Nebensehnen durch die Figuren N_1 und N_2 von pg. 257 charakterisirt. Die Hauptsehnen bilden für sich eine Zickzacklinie, welche die beiden Endpunkte ω_1 und ω_2 der Polar-

<u>sehne asymptotisch einschliessen. Von den einzelnen Ecken dieser Zickzack-linie strahlen eventuell eine Anzahl von Nebensehnen</u> (sagen wir $(n-1)$ Nebensehnen) <u>aus</u>. Die Ecken der Zickzacklinie bezeichnen wir, von einer beliebigen Ecke beginnend, mit (0) (1), (2) . . (−1), (−2), . . . Die zu den bez. Ecken gehörigen Zahlen $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{-1} \ldots$ betrachten wir als ein Maass für die Grösse des Eckenwinkels.

Jede dieser Elementarsehnen gibt uns eine Transformation an die Hand, durch welche wir unsere Polarsehne zu einer reducirten machen können. Der Aufeinanderfolge dieser Elementarsehnen läuft daher eine Aufeinanderfolge von reducirten Formen parallel. <u>Wir behaupten</u>



nun: Diese Aufeinanderfolge reducirter Formen ist mit der früher betrachteten Kette reducirter Formen direct identisch. Wir erhalten also die frühere Kette, indem wir der Reihe nach alle Sehnen unserer Sehnenkette derart in die Mittellinie transformiren, dass immer das positive Sehnenende nach $\omega = \infty$ fällt.

Frei. d. 31. I. 96. Der Beweis dieses Satzes lässt sich direct von unserer Figur aus führen. (Vergl. hierzu Hurwitz in der mehrfach genannten Arbeit, Math. Ann. Bd. 45). Wir ziehen es aber vor, auf unsere frühere Gitterfigur zu recurrieren, um so den Zusammenhang zwischen dem jetzigen und dem damaligen geometrischen Bilde herzustellen.

Die reducirten Formen, welche wir nach unserer jetzigen Methode erhalten, sind den Elementarsehnen der Zickzacklinie eindeutig zugeordnet. Jede Elementarsehne können wir dabei ersetzen durch ihre Endpunkte, d. h. durch ein Paar rationaler Punkte,

wobei der eine Punkt des Paares auf dem positiven, der andere auf dem negativen Segmente der Kreisperipherie gelegen ist.

Wir erinnern uns nun an die beiden „natürlichen Umriss'polygone" der früheren Gitterfigur, deren eines im positiven Quadraten, das andere im nebenliegenden negativen Quadraten lag. Die Ecken des ersten Polygons wurden mit den geraden, die Ecken des anderen mit den ungeraden Indices bezeichnet, und nun wurden die reducirten Formen dadurch gewonnen, dass man jedesmal eine Ecke des einen Polygons mit der darauf folgenden Ecke des anderen Polygons zusammennahm. Können wir nun zeigen, dass jene Punkte der Kreisperipherie und diese Eckpunkte der natürlichen Umrisspolygone gegenseitig eindeutig zusammengehören, so wird dadurch gleichzeitig bewiesen, dass auch die reducirten Formen, welche wir durch die eine oder

andere Methode erhalten können, dieselben sind.

Zunächst führen wir für die rationalen Parameterwerte der Zickzack-Ecken eine passende Bezeichnung ein. Es heisse der zur Ecke (r) gehörige Parameter $\frac{p_r}{q_r}$ (wobei wir die p_r, q_r als teilerfremde ganze Zahlen voraussetzen). Alsdann haben wir etwa auf dem positiven Kreissegmente die Eckpunkte

$$\ldots\ \frac{p_{-2}}{q_{-2}},\ \frac{p_0}{q_0},\ \frac{p_2}{q_2},\ \ldots$$

mit den zugehörigen Winkelgrössen

$$\mu_{-2},\ \mu_0,\ \mu_2,\ \ldots$$

Ebenso liegen auf dem negativen Kreissegmente die Punkte

$$\ldots\ \frac{p_{-1}}{q_{-1}},\ \frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_3}{q_3},\ \ldots$$

mit den zugehörigen Winkeln

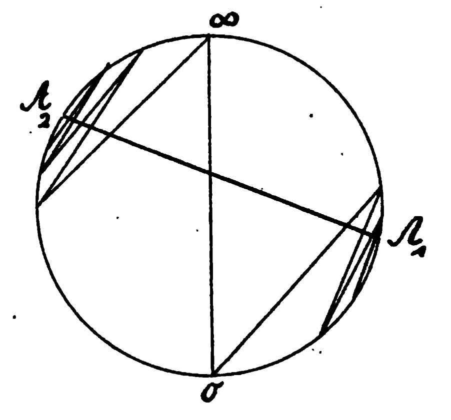
$$\ldots\ \mu_{-1},\ \mu_1,\ \mu_3,\ \ldots$$

Zwischen diese Zahlen ordnen sich noch die zu den freien Enden der Nebensehnen gehörigen Parameter-

werte ein.

Andrerseits bezeichnen wir die Coordinaten x und y der Ecken unserer zur Form $f(x, y)$ gehörigen natürlichen Umrisspolygone mit (p_r, q_r). Wir behaupten nun, dass die Zahlen p_r und q_r in beiden Fällen dieselben sind. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich aus dem Zusammenhang unserer beiderlei Figuren mit gewissen Kettenbruchentwickelungen.

Was zunächst die Kreisfigur betrifft, so transformiren wir in dieser die Sehne mit den Endpunkten $\frac{p_{-1}}{q_{-1}}$ und $\frac{p_0}{q_0}$ auf die bekannte Art und Weise in die Mittellinie der Figur, wobei die Polarsehne in die Polare einer reducirten Form F verwandelt wird.



Die transformirte Zickzacklinie sondern wir in zwei Hälften, welche beide von der Mittellinie ausgehend nach rechts und

links hin auf die Wurzeln Λ_1, Λ_2 von $F=0$ zustreben. Von solchen Teilzickzacklinien lernten wir auf pg. 241, dass sie genau die Kettenentwickelungen derjenigen Kreispunkte wiedergeben, auf welche sie zustreben, wobei ihre Ecken die Näherungsbrüche, ihre Winkel die Teilnenner des Kettenbruches liefern. Daraus folgt, dass die Zahlen $\frac{p_r}{q_r}$ bei positivem Index die Näherungsbrüche von Λ_1, bei negativem die von Λ_2 darstellen.

Andrerseits betrachten wir die natürlichen Umrisspolygone in der Gitterfigur. Führen wir ein reducirtes x, y-Coordinatensystem ein, so zerschneiden seine Axen die natürlichen Umrisspolygone gleichfalls in zwei Hälften, welche sich bez. den Nullstrahlen $\frac{x}{y} = \Lambda_1$,

oder $\frac{x}{y} = \Lambda_2$ der zu dem benutzten Coordinatensystem gehörigen reducirten Form F anschmiegen. Die auf solche Weise entstehenden Teilpolygonzüge stellen aber ihrerseits nach Früherem die Kettenbruchentwickelung von Λ_1 bez. von Λ_2 dar, wobei jetzt die Polygonecken die Coordinaten $x = p_r$, $y = q_r$ erhalten. Wir dürfen dabei ersichtlich annehmen, dass die Wurzeln Λ_1, Λ_2, die wir jetzt betrachten, dieselben sind, wie vorher bei der Kettenbruchentwickelung auf der Kreisperipherie. Da nämlich unsere Umrisspolygone sämtliche reducirten Formen liefern, so muss es möglich sein, das Coordinatensystem so zu legen, dass gerade die vorher benutzte reducirte Form F sich ergibt. Mithin haben die Eckpunkte der Umrisspolygone dieselben Grössen p_r, q_r, zu Gittercoordinaten, welche vorher in den Parameterwerten der Zickzackecken auftraten.

Nach den Bemerkungen zu Bo-

-ginn dieses Beweises folgt dann weiter, dass in der That unsere beiden Figuren hinsichtlich der Reduction der indefiniten Formen dasselbe leisten. Der innere geometrische Zusammenhang dieser beiden so verschiedenen Figuren ist jedenfalls ein sehr merkwürdiger. Wir bemerken noch, dass die freien Ecken der $(\mu-1)$ Nebensehnen, welche von einem Eckpunkte unserer Zickzacklinie auslaufen, ihrerseits die Parameterwerte $\omega = \frac{p}{q}$ aufweisen, welche den Coordinaten p, q der $\mu-1$ Nebenpunkte entsprechen, welche die correspondirende Seite des einen Umrisspolygons im Gitter trägt.

Es wird nun darauf ankommen, aus der neuen Figur neue zahlentheoretische Resultate abzuleiten. Wir nehmen zunächst die Frage nach den Automorphien einer Form f noch einmal auf. Wir wollen jetzt 4 Arten von Automorphien unterscheiden, welche durch

oder $\frac{x}{y} = \Omega_2$ der zu dem benutzten Coordinatensystem gehörigen reducirten Form F anschmiegen. Die auf solche Weise entstehenden Teilpolygonzüge stellen aber ihrerseits nach Früherem die Kettenbruchentwickelung von Ω_1 bez. von Ω_2 dar, wobei jetzt die Polygonecken die Coordinaten $x = p_r$, $y = q_r$ erhalten. Wir dürfen dabei ersichtlich annehmen, dass die Wurzeln Ω_1, Ω_2, die wir jetzt betrachten, dieselben sind, wie vorher bei der Kettenbruchentwickelung auf der Kreisperipherie. Da nämlich unsere Umrisspolygone sämtliche reducirten Formen liefern, so muss es möglich sein, das Coordinatensystem so zu legen, dass gerade die vorher benutzte reducirte Form F sich ergibt. Mithin haben die Eckpunkte der Umrisspolygone dieselben Grössen p_r, q_r, zu Gittercoordinaten, welche vorher in den Parameterwerten der Zickzackecken auftraten.

Nach den Bemerkungen zu Bo-

-ginn dieses Beweises folgt dann weiter, dass in der That unsere beiden Figuren hinsichtlich der Reduction der indefiniten Formen dasselbe leisten. Der innere geometrische Zusammenhang dieser beiden so verschiedenen Figuren ist jedenfalls ein sehr merkwürdiger. Wir bemerken noch, dass die freien Ecken der $(\mu - 1)$ Nebensehnen, welche von einem Eckpunkte unserer Zickzacklinie auslaufen, ihrerseits die Parameterwerte $\omega = \frac{p}{q}$ aufweisen, welche den Coordinaten p, q der $\mu - 1$ Nebenpunkte entsprechen, welche die correspondirende Seite des einen Umrisspolygons im Gitter trägt.

Es wird nun darauf ankommen, aus der neuen Figur neue zahlentheoretische Resultate abzuleiten. Wir nehmen zunächst die Frage nach den <u>Automorphien</u> einer Form f noch einmal auf. Wir wollen jetzt 4 Arten von Automorphien unterscheiden, welche durch

wie das folgende Schema charakterisirt sind:

1. $\alpha\delta-\beta\gamma = +1, \; \omega_1 \sim \omega_1, \; \omega_2 \sim \omega_2$
2. $\alpha\delta-\beta\gamma = +1, \; \omega_1 \sim \omega_2, \; \omega_2 \sim \omega_1$
3. $\alpha\delta-\beta\gamma = -1, \; \omega_1 \sim \omega_2, \; \omega_2 \sim \omega_1$
4. $\alpha\delta-\beta\gamma = -1, \; \omega_1 \sim \omega_1, \; \omega_2 \sim \omega_2$

Im Falle 2. und 3. werden hiernach die Wurzelpuncte von $f=0$ auf dem Kreise vertauscht, im Falle 1. und 4. bleiben sie fest. Im Falle 1. und 2. handelt es sich um eine Substitution, welche den positiven Sinn, in welchem wir uns die Kegelschnittperipherie durchlaufen denken mögen, ungeändert lässt, im Falle 3. und 4. um eine Substitution, welche diesen Sinn umkehrt.

Der Fall 1. ist früher ausführlich untersucht worden. Der Determinante +1 und dem Festbleiben der Wurzelpunkte entsprechend wird dabei das positive Segment unseres Kegelschnitts in das positive, das negative in das negative übergeführt. <u>Dieser Fall führt auf die</u>

gewöhnliche Theorie der Pell'schen Gleichung $t^2 - Du^2 = 4$.

Im Falle 2. wird die Kreisperipherie in sich verschoben, so dass ω_1 nach ω_2 und ω_2 nach ω_1 gelangt. Da (wegen der Substitutionsdeterminante $+1$) die Reihenfolge der einzelnen Teile der Kreisphäre nicht geändert wird, so gelangt hierbei das positive Segment an den Platz des negativen und das negative an den des positiven; es geht f in $-f$ über. Der zweite Fall tritt hiernach dann ein, wenn eine Form ihrer entgegengesetzten eigentlich aequivalent ist. Die Form heisst dann sich selbst „invers", vergl pg. 161:

Der Fall 3. bedeutet eine Spiegelung an einer Elementarsehne, welche das positive und negative Segment je in 2 Abschnitte zerlegt. Bei der Spieglung werden dise Abschnitte des positiven Segments (und ebenso die des negativen) unter sich ausgetauscht, so dass $+f$ in $+f$ übergeht. In diesem

Falle gehört f zu einer Anceps. Klasse.

Der Fall 4. gibt zu der „aussergewöhnlichen Pell'schen Gleichung" $t^2 - Du^2 = -4$ Anlass. Das positive und negative Segment des Kreises werden im Falle 4. gegenseitig vertauscht; f geht daher in −f über.

Bei commensurabeln a, b, c sind die Automorphien 1. wie wir wissen, immer u. zw. in unendlicher Zahl vorhanden. Zugleich ist klar, dass diese Automorphien nur bei commensurabeln a, b, c eintreten; denn f=0 soll mit den Fixpunkten von $\binom{\alpha\ \beta}{\gamma\ \delta}$ übereinstimmen. Von den 3 anderen Arten braucht im Allgemeinen keine aufzutreten. Diese letzteren bedingen sich dabei gegenseitig, in dem Sinne, dass das Eintreten von zweien derselben auch Automorphien des dritten Falles nach sich zieht. Wenn beispielsweise Automorphien des Falles 2. und 3. vorhanden sind, so erhält man durch Zusammensetzung von zwei solchen Automorphien eine Automor-

phie von der Determinante -1, welche ω_1 in ω_1 und ω_2 in ω_2 überführt, d. h. eine Automorphie des Falles 4. Aus dieser Bemerkung fliessen Sätze der folgenden Art: Wenn es in einer Aequiv.-Klasse eine Form gibt, welche mit ihrer entgegengesetzten eigentlich aequivalent ist, so besitzt die aussergewöhnliche Pell'sche Gleichung Lösungen etc. Fall 4. ist wieder durchaus daran gebunden, dass die Coefficienten a, b, c der vorgelegten Form commensurabel sind.

Do. d. 6. II. 96. Wir fragen nun nach der geometrischen Bedeutung dieser 4 Arten von Automorphien. Zum vollen Verständnis dessen müssen wir uns eine Begriffsbildung aneignen, welche von Cayley herrührt, die Cayley'sche Maass-bestimmung. Dieselbe hängt auf's Innigste mit unserer Dreiecksfigur und allen jenen höheren Figuren zusammen, welche sich beim Studium von Gruppen linearer Substitutionen in der Theorie der automorphen

Functionen darbieten. Leider können wir hierauf nicht mehr so ausführlich eingehen, als es der Wichtigkeit der Sache angemessen wäre.

Wir haben schon im ersten Teil dieser Vorlesung bei den Gitterbetrachtungen eine Pseudometrik eingeführt. Damals genügte es uns, statt der imaginären Kreispunkte zwei andere (reelle oder imaginäre) Punkte der unendlich fernen Geraden zu substituiren und diese einer Maassbestimmung zu Grunde zu legen. Jetzt gehen wir mit Cayley einen Schritt weiter. Wir fassen nämlich die beiden Kreispunkte zusammen mit der doppeltzählenden Verbindungslinie, d. i. der unendlich weiten Geraden, als einen ausgearteten Kegelschnitt auf und ersetzen ihn durch einen nichtausgearteten. In unserem Falle wählen wir als solchen unseren fundamentalen Kegelschnitt $D = 0$. Die Cayley'sche Maassbestimmung steht nun zu diesem Kegelschnitt in einer ganz ähnlichen

Beziehung, wie die gewöhnliche Maass-bestimmung zu dem Paar der imaginären Kreispunkte. Um zunächst den <u>Winkel zweier Geraden</u> zu definiren, ziehen wir von ihrem Schnittpunkte aus die Tangenten an den fundamentalen Kegelschnitt und berechnen das Doppelverhältnis (D) jener Geraden mit diesen Tangenten. Alsdann bezeichnen wir als Winkel (ω) jener beiden Geraden die Grösse

$$W = \frac{i}{2} \lg D$$

Dualistisch genau entsprechend definiren wir die <u>Entfernung zweier Punkte</u>, indem wir zu den gegebenen Punkten die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit dem fundamentalen Kegelschnitt hinzunehmen und das Doppelverhältnis (D′) dieser 4 Punkte bilden. Alsdann bezeichnen wir als Entfernung (E) der gegebenen Punkte

$$E = \frac{i}{2} \lg D'.$$

Dieses die einfachen Grundzüge jener Theorie. Ich muss es Ihnen überlassen, sich in dieselbe soweit einzuleben,

daß Sie Sich womöglich in einer mit Cayley'scher Maassbestimmung ausgestatteten Ebene gleich leicht, wie in der gewöhnlichen, zurecht finden.

Hier interessiren uns vornehmlich die Substitutionen $\left({\alpha \atop \gamma}\,\beta\right)$, welche uns gewisse Collineationen der Ebene lieferten. Da dieselben unseren fundamentalen Kegelschnitt in sich überführen, so lassen sie auch die Maassverhältnisse der Figuren völlig ungeändert. Zwei Geraden bilden also nach der Collineation denselben Winkel, wie vor derselben, zwei Punkte haben vor und nach der Collineation dieselbe Entfernung. Wir unterscheiden dabei zwischen den Substitutionen von der Determinante $+1$ und denen von der Determinante -1. Bei den ersteren bleibt auch der Sinn, in dem die Punkte des Kegelschnitts aufeinander folgen, ungeändert, bei den letzteren wird er umgekehrt. Irgend eine Figur der Ebene geht daher bei den Substitutionen

$\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ in eine direct congruente, bei den Substitutionen $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ in eine invers congruente über. Wir bezeichnen die ersteren als Bewegungen, die letzteren als Umlegungen der Ebene. Wir würden die Gesammtheit dieser Bewegungen und Umlegungen erhalten, wenn wir die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als continuirliche Parameter ansehen wollten; nun sie aber nur ganzzahlige Werte annehmen können haben wir eine in dieser Gesammtheit enthaltene discontinuirliche Untergruppe vor uns.

Bei allen Bewegungen und Umlegungen dieser Untergruppe geht unsere Figur in sich über und zwar geht bei der Gesammtheit unserer Bewegungen jedes schraffirte Dreieck in jedes schraffirte, bei der Gesammtheit der Umlegungen jedes schraffirte in jedes nicht-schraffirte Dreieck über. Jedes schraffirte Dreieck ist also im Sinne der Cayley'schen Maassgeometrie mit

jedem schraffirten direct, mit jedem nicht-schraffirten invers congruent. Durch diese Formulirung wird die Symmetrie unserer Figur viel schärfer gekennzeichnet, als es ohne dieselbe möglich war. Unsere Figur ist in der Cayley'schen Maassbestimmung eine reguläre Gebietseinteilung, ebenso gut wie es etwa ein Schachbrett in der gewöhnlichen Maassbestimmung ist. Insbesondere haben alle Dreiecke unserer Figur die gleichen Winkel, nämlich 60°, 90° und da, wo sie an die Peripherie des Kegelschnitts heranragen, 0°.

Wir kommen nun speciell auf die geometrische Bedeutung der Automorphien zurück, wobei wir die pg 268 unterschieden Fälle einzeln betrachten. Die Automorphien des Falles 1. und 2. sind Bewegungen, die des Falles 3. und 4. Umlegungen, bei denen ein vorgegebener Punkt (a, b, c) festbleibt. Die Automorphien des Falles 1. und 2. werden wir daher als Drehungen, den Punkt a, b, c im Falle 1. als Dre-

hungscentrum anzusprechen haben.

Im Falle 1. bleiben auch die Berührungspunkte der von a, b, c an den fundamentalen Kegelschnitt gezogenen Tangenten für sich fest. Da wir somit die sämmtlichen 3 Fixpunkte der betr. Collineation (nämlich diese beiden Berührungspunkte und den Punkt a, b, c selbst) kennen, so können wir uns in der nebenstehenden Zeichnung ein Bild von der durch sie bewirkten Umformung machen. Nach den Elementen der projectiven Geometrie bildet jede Gerade durch den Punkt a, b, c mit den beiden festen Tangenten und der durch die Collineation aus ihr hervorgehenden Geraden ein Doppelverhältnis, welches unabhängig von der Aus-

wahl der Geraden ist. Im Sinne der Cayley'schen Maassbestimmung können wir dies so ausdrücken: <u>Jede Gerade durch a, b, c wird vermöge der Collineation um einen constanten Winkel gedreht.</u>

Die Grösse dieses Winkels hängt auf's Einfachste mit dem Pell'schen Winkel zusammen. Führen wir für den Augenblick solche Dreiecks-Coordinaten x_1, x_2, x_3 ein, dass die Gleichungen der beiden Tangenten lauten $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$, die Gleichung ihrer Berührungssehne $x_2 = 0$, so können wir unsere Collineation in der Form anschreiben:

$$\rho x_1' = \lambda x_1, \quad \rho x_2' = x_2, \quad \rho x_3' = \mu x_3.$$

Nun wird aber die Gleichung des fundamentalen Kegelschnittes, folgende Gestalt haben $x_2^2 - K x_1 x_3 = 0$, wo K irgend einen Werth hat, den man durch Annahme des Einheitspunktes noch beliebig fixiren kann. Da unsere Collineation diesen Kegelschnitt in sich transformiren soll, so folgt, dass $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Betrachten wir eine beliebi-

ge Gerade $x_1' + \nu x_3' = 0$ durch den Punkt a, b, c; dieselbe geht bei unserer Collineation über in $\frac{x_1'}{\lambda} + \nu\lambda x_3' = 0$. Das Doppelverhältnis der 4 Geraden

$x_1' + \nu x_3' = 0$, $x_1' + \nu\lambda^2 x_3 = 0$, $x_1' = 0$, $x_3' = 0$

wird nun ersichtlich gleich λ^2, der Cayley'sche Drehungswinkel also gleich $i \lg \lambda$.

Wollen wir diesen Winkel in den Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ausdrücken, so bemerken wir, dass λ^2 derjenige Factor ist, mit welchem sich der Quotient aus den linken Seiten der Tangentengleichungen $x_1' = 0$, $x_3' = 0$ bei der Transformation multiplicirt. Wir haben nämlich $\frac{x_1'}{x_3'} = \lambda^2 \frac{x_1}{x_3}$. In den früheren Coordinaten lauten die Gleichungen der Tangenten $x_1' = 0$ und $x_3' = 0$ nach pag 182 folgendermassen:

$A\omega_1^2 + B\omega_1 + C = 0$ und $A\omega_2^2 + B\omega_2 + C = 0$,

(wo wir die laufenden Coordinaten zur Unterscheidung von den Coordinaten a, b, c des festen Poles durch grosse Buchstaben bezeichnet haben). Wir wollen hier noch die

Wurzeln Λ_1, Λ_2 der Gleichung:

$$\mathfrak{A}\Lambda^2 + \mathfrak{B}\Lambda + \mathfrak{C} = 0$$

einführen. Dann werden die Gleichungen unserer Tangenten:

$$(\Lambda_1 - \omega_1)(\Lambda_2 - \omega_1) = 0 \quad \text{bez.} \quad (\Lambda_1 - \omega_2)(\Lambda_2 - \omega_2) = 0;$$

der Ausdruck, dessen Verhalten wir bei der Pell'schen Substitution untersuchen sollen, ist daher:

$$\frac{(\Lambda_1 - \omega_1)(\Lambda_2 - \omega_1)}{(\Lambda_2 - \omega_2)(\Lambda_2 - \omega_2)}$$

Aber die Pell'schen Substitution schreibt sich in dem Parameter Λ nach pag 144 folgendermassen:

$$\frac{\Lambda - \omega_1}{\Lambda - \omega_2} = \left(\frac{t + u\sqrt{\mathfrak{D}}}{2}\right)^2 \frac{\Lambda' - \omega_1}{\Lambda' - \omega_2}.$$

Indem wir diese Formel gleichzeitig auf Λ_1 wie auf Λ_2 anwenden, erhalten wir:

$$\frac{(\Lambda_1 - \omega_1)(\Lambda_2 - \omega_1)}{(\Lambda_1 - \omega_2)(\Lambda_2 - \omega_2)} = \left(\frac{t + u\sqrt{\mathfrak{D}}}{2}\right)^4 \cdot \frac{(\Lambda_1' - \omega_1)(\Lambda_2' - \omega_1)}{(\Lambda_1' - \omega_2)(\Lambda' - \omega_2)}.$$

Der Factor, mit dem sich bei der Pell'schen Substitution der Quotient unserer Tangentengleichungen multiplicirt, ist daher

$$\lambda^2 = \left(\frac{t + u\sqrt{D}}{2}\right)^4 .$$

Mithin wird

$$i \lg \lambda = 2i \lg \frac{t + u\sqrt{D}}{2} ;$$

dieses ist aber das Doppelte derjenigen Grösse, welche pg 145 als Pell'scher Winkel definirt wurde. Der Cayley'sche Winkel ist also einfach gleich dem Doppelten des Pell'schen Winkels.

Die Hauptpunkte der Pell'schen Theorie aber drücken sich in der Sprache der Cayley'schen Maassbestimmung folgendermassen aus: Es gibt in unserer Gruppe zu jedem rationalen Centrum a, b, c unendlich viele Drehungen; dieselben setzen sich aus einer kleinsten durch fortgesetzte Wiederholung zusammen; die zugehörigen Drehungswinkel werden berechnet, indem man die sämtlichen Wurzeln der Pell'schen Gleichung benutzt.

Zum Vergleich ziehen wir noch die Automorphien der definiten Formen heran. Wir haben zwei Arten derselben zu unterscheiden, solche von der Periode 2 und solche von der Periode 3. Die ersten gehörten zu Formen, welche in den Mittelpunkten der Dreieckskanten, die letzteren zu Formen, welche in den Mittelpunkten der Dreiecksflächen ihre repräsentirenden Punkte hatten.

Auch diese Automorphien sind im Sinne unserer Maassbestimmung Drehungen. Der Drehungswinkel beträgt beziehungsweise 180° und 120°.

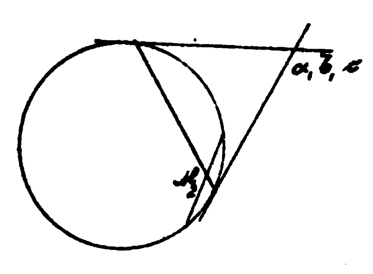
Wir können die Drehungsmittelpunkte der ersten Art als M_2, die der zweiten als M_3 bezeichnen. Diese Punkte liegen discontinuirlich im Innern des Kegelschnittes zerstreut. In demselben Sinne werden wir alle rationalen Punkte ausserhalb des Kegelschnittes (und ebenso die rationalen Punkte auf dem Rande desselben) als M_∞ bezeichnen können, weil sie Centren fur Cayley'sche Drehungen

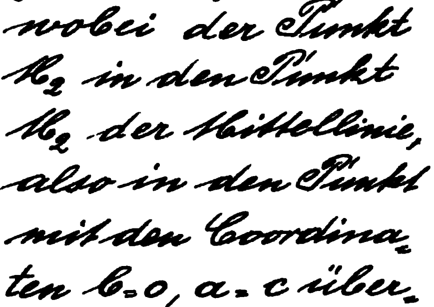
von unendlich hoher Periode, d. h. für aperiodische Drehungen sind. Dieselben erfüllen das Aeussere (und den Rand) des Kegelschnitts überall dicht.

Der Fall 2. der Automorphien trat ein bei einer mit sich selbst „inversen" Formenklasse. Dabei wurden die Wurzeln ω_1 und ω_2, d. h. die Enden der zum Punkte a, b, c gehörigen Polarsehne gegen einander vertauscht. Da diese Vertauschung durch eine Bewegung der Ebene geschieht, so muss auf der Sehne ein Punkt liegen, in welchem eine Collineation unserer Gruppe u. zw. eine Collineation von der Periode 2 ihren Fixpunkt hat. Die Sehne muss daher durch einen der Punkte M_2 hindurchgehen.

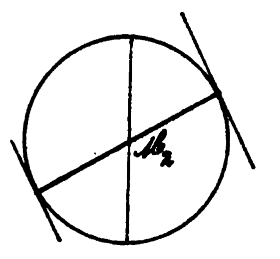
Um auch ein arithmetisches Kriterium für diesen Fall der Automorphien hinzuzufügen, bemerken wir, dass durch den Punkt M_2 der Polaren nothwendig eine Elementarsehne erster Art oder

Dreiecksfigur hindurchgeht. Diese Elementarsehne können wir durch eine Collineation unserer Gruppe in die Mittellinie der Figur transformiren,





wobei der Punkt M_2 in den Punkt M_2 der Mittellinie, also in den Punkt mit den Coordinaten $b=0$, $a=c$ übergeht. Gleichzeitig wird dabei unsere Form (a, b, c) in eine reducirte



Form (A, B, C) verwandelt, (weil ihre Polare nach der Transformation die Mittellinie im zugehörigen Punkte M_2 schneidet). Die Gleichung der Polaren des reducirten Punktes

$$Bb - 2Ac - 2Ca = 0$$

muss hiernach erfüllt sein, wenn wir für a, b, c speciell die Coordinaten dieses

Punktes M_2 eintragen. Es muss also sein

$$A + C = 0.$$

Dieses die gesuchte arithmetische Bedingung für das Eintreten des 2ten Falles der Automorphien. Man erkennt unmittelbar, dass diese Bedingung nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend ist. Mithin haben wir den Satz:

<u>Soll eine Form mit sich selbst invers (d.h. mit ihrer inversen eigentlich aequivalent) sein, so muss in der Kette der reducirten Formen eine solche Form vorhanden sein, deren erster und letzter Coefficient entgegengesetzt gleich sind.</u>

Wir kommen zu den Fällen 3. und 4. Hier handelt es sich um Substitutionen von der Determinante -1. Wir bezeichneten unter ihnen diejenigen Operationen, bei denen eine Sehne unserer Dreiecksfigur ungeändert bleibt, als Spiegelungen

in einem übertragenen Sinne, während nur die Spiegelungen an den Durchmessern unserer Figur im Sinne der elementaren Maassbestimmung wirkliche Spiegelungen waren. <u>Vom Standpunkte der Cayley'schen Maassbestimmung sind alle diese Operationen wirkliche Spiegelungen</u>, d. h. Umformungen, bei denen jede gegebene Figur in eine invers congruente umgewandelt wird. Wir mögen noch die Elementarsehnen erster und zweiter Art bez. die an ihnen stattfindenden Spiegelungen als S' und S'' unterscheiden.

Im Falle 3. der Automorphien handelt es sich um eine Spiegelung, welche die Endpunkte ω_1, ω_2 der Polarsehne von (a, b, c) vertauscht, wobei die Polarsehne in sich transformirt wird. Sie muss alsdann durch das Centrum der Spiegelung hindurchgehen. Gleichzeitig geht dann die Axe der Spiegelung, welche Polare des Centrums ist, durch den Pol

unserer Sehne, d. h. durch den Punkt (a, b, c) hindurch. Die Axe der Spiegelung kann aber, da es sich um eine Operation unserer Gruppe handelt, nur eine Elementarsehne erster oder zweiter Art sein. <u>Der Punkt (a, b, c) muss daher auf einer der Geraden S' oder S'' liegen.</u>

Um hieraus wieder ein arithmetisches Kriterium für das Eintreten des Falles 3) abzuleiten, bemerken wir, dass wir jede S' in die Mittellinie $b = 0$, jede S'' in die Seite $a = b$ des reducirten Dreiecks durch eine unserer Collineationen verwandeln können. Die Form (a, b, c) geht dabei in eine nothwendig reducirte Form über, für welche im einen oder andern Falle entweder $B = 0$ oder $A = C$ ist. In beiden Fällen sprechen wir von einer <u>Ancepsform</u>. <u>Die Automorphien des Falles 3) treten also bei den Anceps-klassen auf, d. h. dann, wenn sich in der Kette der reducirten Formen entweder eine Form befindet mit</u>

<u>$A = C$ oder eine solche mit $B = 0$.</u>

Im Falle 4) endlich handelt es sich um eine Umlegung der Ebene, bei der die Wurzeln ω_1, ω_2 in der Gleichung $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ ungeändert bleiben. Hieraus werden wir gerade so, wie auf pg. 141 Bedingungen für die Coefficienten $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ der Substitution ableiten können. Dieselben drücken sich ebenso wie dort mit Hülfe zweier ganzer Zahlen t und u aus, zwischen denen jetzt, da die Determinante der Substitution gleich -1 ist, die Gleichung besteht $t^2 - Du^2 = -4$. Diese Gleichung heisst die <u>aussergewöhnliche Pell'sche Gleichung</u>. Um das Vorhandensein von Automorphien des Falles 4. zu entscheiden, sind wir auf die Untersuchung dieser Gleichung angewiesen, über deren Lösungen im allgemeinen nichts ausgesagt werden kann. Wir müssen uns darauf beschränken, Tabellen zu citiren, in denen immer die kleinste Lösung dieser Gleichung ange-

geben wird (falls Lösungen überhaupt vorhanden sind) nämlich:

<u>Legendre</u>: Théorie des nombres Bd I Tab. X (der deutschen Ausgabe).

<u>Cayley</u>: Gesammelte Werke Bd. IV pg 40.

Nennen wir die betr. kleinste Lösung t_0', u_0' und bilden uns die complexe Zahl $\frac{t_0' + u_0' \sqrt{D}}{2}$, so erhält man aus ihr die sämmtlichen Lösungen der beiden Pell'schen Gleichungen $t^2 - Du^2 = \pm 4$, indem man $\frac{t + u\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{t_0' + u_0' \sqrt{D}}{2}\right)^{\nu}$ setzt und ν alle ganzen, positiven und negativen Zahlen durchlaufen lässt. Die geraden ν ergeben dabei die Lösungen $t^2 - Du^2 = +4$, die ungeraden ν diejenigen von $t^2 - Du^2 = -4$.

Frei. d. 7. II. Nachdem wir unsere Dreiecksfigur für die Reduction der einzelnen indefiniten Form verwertet haben, bleibt jetzt noch die abschliessende Frage zu besprechen nach der Gesammtheit der reducirten Formen einer Klasse. Von

Seiten der Zahlentheorie wissen wir darüber, dass die reducirten Formen eine Kette von unendlicher Gliederzahl bilden, die aperiodisch ist, fallnicht gerade die a, b, c commensurable Zahlen sind. In geometrischer Hinsicht möchte man nun erfahren: Wie verteilen sich die repräsentirenden Punkte auf das reducirte Gebiet? Nach einem bekannten Grundsatze von Weierstrass müssen unendlich viele Punkte mindestens eine Häufungsstelle haben. Man wird also vor Allem fragen: wo liegen die Häufungstellen etc.? Diese interessanten Fragen sind bisher gänzlich unerledigt.

Nur eine negative Aussage lässt sich ohne Weiteres hierüber geben: Es ist nicht möglich das Aeussere des Kegelschnittes so in Fundamentalbereiche zu zerlegen, dass keine zwei Punkte des einzelnen Bereiches aequivalent sind. Dass dieses im Innern des Kegelschnitts möglich war, lag daran, dass die Fixpunkt-

te M_2 u. M_3 der Collineationen im Innern des Kegelschnittes einen endlichen Abstand von einander haben. In Folge dessen legen sich hier die Fundamentalbereiche, indem jeder an einen Punkt M_2 und einen Punkt M_3 heranreicht, als Gebiete endlicher Ausdehnung an einander. Der Winkel, mit dem sich der Bereich an seinen Punkt M_2, bezw. M_3 heranzieht, ist der zugehörige Pell'sche Winkel, d. h. 180°, bezw. 120°. Dies ist ersichtlich nothwendig. Nun wissen wir aber, dass im Aeusseren des Kegelschnittes jeder rationale Punkt Fixpunkt einer Collineation ist, und dass die rationalen Punkte die Ebene überall dicht überdecken. Der gesuchte Fundamentalbereich müsste sich daher an jeden seiner rationalen Punkte mit einer Ecke heran ziehen, deren Winkel durch den Pell'schen Winkel der betr. Automorphie bestimmt ist. Wir würden so zu

einem Bereiche kommen, der unserer Raumvorstellung absolut unzugänglich ist und welcher das Gegenteil von einer continuirlichen Gebietsüberdeckung darstellt. Es ist noch eine offene Frage, wie man die vorliegenden zahlentheoretischen Ergebnisse hinsichtlich der indefiniten Formen in ihrer Gesammtheit geometrisch aufzufassen hat.

Dabei liegen die Verhältnisse ausserhalb des Kegelschnittes auch durchaus anders, als es auf der Peripherie desselben der Fall ist. Auf der Peripherie waren die sämmtlichen Klassen aequivalenter Punkte, wie wir sahen, überall dicht verteilt. Das findet ausserhalb nicht mehr statt. Denn beispielsweise gibt es zu jedem rationalen Punkte ja nur eine endliche Anzahl aequivalenter Punkte. In gewisser Hinsicht sind also hier die aequivalenten Punkte sogar ausserordentlich dünn verteilt.

Wir wollen das vorliegende Pro

lem noch in abstracterer Weise aussprechen. Wir wollen nämlich allgemein fragen: Ist es möglich die Classen der indefiniten Formen irgendwie in der Ebene zu lokalisiren? (so dass jeder Classe ein einziger repräsentirender Punkt zugewiesen wird).

Eine Classe indefiniter Formen ist vollkommen bestimmt durch eine Reihe von ganzen Zahlen

$\dots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots$ —,

welche wir uns als Seitenlängen eines Umrisspolygons (im Gitter) oder als Winkelöffnungen einer Zickzacklinie (innerer Dreiecksfigur) vorstellen mögen. Zwei Formen sind aequivalent, wenn ihre zugehörigen Zahlenreihen identisch ausfallen, wobei die Reihen natürlich noch gegeneinander verschoben sein können. Es käme nun darauf an, die Gesamtheit dieser Zahlenreihen in übersichtlicher Weise geeigneten Punkten einer Ebene zuzuordnen. Wir kommen so auf ein Problem von viel mehr arith-

metischem als geometrischem Charakter, welches an die Ideen der Cantor'schen Mengenlehre erinnert. Welches ist der durch die Natur der Sache gegebene „Ordnungstypus" der von unseren Zahlenreihen gebildeten Menge?

Zum Abschlusse werden wir sagen müssen, dass die Theorie der indefiniten Formen viel und schwieriger aber auch interessanter ist, als die der definiten Formen, weil sie auf noch unerledigte Fragestellungen führt. Aber eben deshalb müssen wir diese Theorie jetzt verlassen.

Nunmehr kehren wir zu den definiten Formen zurück. Dabei werden wir für den Rest der Vorlesung unserer Betrachtungen ausser auf Zahlentheorie und Geometrie noch auf den dritten Grundpfeiler der mathematischen Gesammtwissenschaft, auf die Functionentheorie, stützen. Wir überschreiben nämlich das folgende Capitel:

Ueber den Zusammenhang der definiten quadratischen Formen mit der Theorie der elliptischen Functionen.

Der Grund dieses Zusammenhanges ruht auf der elementar-geometrischen Vorstellung eines Parallelengitters, zu welchem die quadratischen Formen einerseits und die elliptischen Functionen andrerseits hinführen.

Die Gittertheorie der definiten Formen ist uns von früher bekannt. Wir können dabei unsere Gitter (da es sich ausschliesslich um definite Formen handeln soll) in der gewöhnlichen Maassbestimmung construiren. Wir tragen bei gegebener Form

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

von einem Puncte o die Strecken $\sqrt{a}$ und $\sqrt{c}$ unter dem Winkel

$$\chi = \arc\cos \frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

gegen einander ab. Dabei werden wir gegen früher zweckmässigerweise eine kleine Modification eintreten lassen. Wir legen nämlich die Strecken so, dass Vc durch eine positive Drehung um den Winkel χ in Va übergeht. Diese Festsetzung hat das Unbequeme, dass in der Folge die x- und y- Axen die umgekehrte Lage haben werden, wie gewöhnlich; sie ist aber nothwendig, wenn wir mit den üblichen Bezeichnungen aus der Theorie der elliptischen Functionen in Uebereinstimmung sein wollen.

An das erste Parallelogramm setzen wir fortgesetzt congruente an; die Ecken dieser Parallelogramme haben zu Coordinaten x und y ganze Zahlen. Der Wert der Form f im Punkte x y wird geometrisch durch die (elementar gemessene) Entfernung $r^2 = ax^2 + bxy + cy^2$ gegeben. Die Form f lösen wir in zwei conjugirt imaginäre Bestandtheile auf. Dabei können

wir noch dem einen Bestandtheil einer Propositionalitätsfactor willkürlich hinzufügen, vorausgesetzt, dass wir dem anderen den reciproken Factor beilegen. Sollen die Bestandtheile conjugirt imaginär sein, so muss der Factor die Form haben $= e^{i\varphi}$, so dass unsere Zerlegung lautet:

$$f = e^{i\mathfrak{C}}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{D}}{2\sqrt{a}}\,y\right) e^{-i\mathfrak{C}}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b-\sqrt{D}}{2\sqrt{a}}\,y\right).$$

Der einzelne Bestandtheil ist eine complexe Zahl u. zw. gerade diejenige, welche dem Gitterpunkte x, y in der Gaussischen Ebene zukommt. Der Factor $e^{i\mathfrak{C}}$ werde als Azimuthalfactor bezeichnet, der Winkel $\mathfrak{C}$ bedeutet nämlich dasjenige Azimuth, unter dem die x-Axe gegen die Axe der reellen Zahlen in der Gaussischen Ebene geneigt ist. Wir nennen

$$e^{i\mathfrak{C}}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{D}}{2\sqrt{a}}\,y\right)$$

eine complexe Gitterzahl. Die Form f erscheint dabei als Norm dieses Systems von Gitterzahlen.

Andrerseits führt ein parallelogrammatisches Gitter sofort auf den Begriff der <u>doppelperiodischen</u> Functionen. Die Perioden ω_1, ω_2 derselben sind diejenigen complexen Zahlen, welche den Endpunkten der von 0 auslaufenden Parallelogrammseiten entsprechen. Die allgemeinste Periode lautet dann, unter x, y ganze Zahlen verstanden $\omega_1 x + \omega_2 y$. Wollen wir ω_1, ω_2 durch die Coefficienten der quadratischen Form ausdrücken, so haben wir

$$\omega_1 = e^{i\tau}\sqrt{a}$$

$$\omega_2 = e^{i\tau}\,\frac{b+\sqrt{D}}{2\sqrt{a}},$$

wie man erkennt, wenn man in dem oben stehenden Ausdrucke der Gitterzahlen $x=1$, $y=0$ bez. $x=0$, $y=1$ einträgt. Wollen wir umgekehrt die quadratische Form durch ω_1 und ω_2 ausdrücken, so berechnen wir die Norm

der allgemeinen complexen Gitterzahl oder, was dasselbe ist, die Norm der allgemeinen Periode

$$\omega_1 x + \omega_2 y.$$

Wir erhalten so:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = (\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y).$$

Nun interessirt uns in der Zahlentheorie weniger die einzelne Form als die ganze Klasse von Formen, welche durch die Substitutionen

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha x' + \beta y' \\ y = \gamma x' + \delta y' \end{array}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

verbunden sind. Bei dieser Substitution erleiden auch die Perioden eine Umänderung.

Es wird nämlich

$$\omega_1 x + \omega_2 y = (\alpha\omega_1 + \gamma\omega_2)x' + (\beta\omega_1 + \delta\omega_2)y'.$$

Setzen wir dieses gleich

$$\omega_1' x' + \omega_2' y'$$

so haben wir

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1' = \alpha\omega_1 + \gamma\omega_2 \\ \omega_2' = \beta\omega_1 + \delta\omega_2 \end{array}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = +1.$$

Die Perioden erfahren also eine Trans=

formation, welche wir als Transformation erster Ordnung bezeichnen. Sie entsteht aus der vorigen Transformation für die Gittercoordinaten x, y durch blosse Vertauschung von β und γ.

Durch den Vergleich mit der Zahlentheorie werden wir so darauf geführt, diese Transformationen erster Ordnung principiell in die Betrachtung einzuführen und solche Functionen zu suchen, welche nicht nur bei den Substitutionen ungeändert bleiben:

$$u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

(also schlechtweg doppelperiodisch sind) sondern auch bei den Periodentransformationen

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega_1 + \gamma\omega_2 \\ \omega_2' &= \beta\omega_1 + \delta\omega_2 \end{aligned}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = +1.$$

Diese Functionen nennen wir nun elliptische Functionen, so dass die elliptischen Functionen durch die vorstehende ternäre Gruppe definirt sein sollen. Der Inbegriff aller solcher Functionen soll - vorbe-

haltlich einer späteren Verschärfung des Begriffes, und unbeschadet späterer Verallgemeinerungen – ein elliptisches Gebilde heissen. Der einzelnen Klasse quadratischer Formen tritt also ein elliptisches Gebilde an die Seite.

Nehmen wir im Speciellen die Coefficienten a, b, c der Form als ganze Zahlen an, so tritt der besondere Fall ein, dass jedesmal eine endliche Anzahl (h) von Klassen zusammengehört, dass sind die Klassen der gleichen Discriminante D. Dementsprechend gibt es dann auch h zusammengehörige elliptische Gebilde. Wir nennen diese Gebilde, – also diejenigen, die zu ganzzahligen quadratischen Formen gehören –, singuläre elliptische Gebilde. Unser besonderes Interesse wird sein, zu untersuchen, wie sich diese singulären Gebilde von den allgemeinen elliptischen Gebilden unterscheiden und wie sich ihre zahlentheoretische Zusammengehörigkeit analytisch aus-

drückt.

Do. d. 13. II. 96. Zu der obigen Définition der elliptischen Functionen fügen wir als erste Einschränkung hinzu, dass die Function in den 3 Grössen u, ω_1, ω_2 <u>homogen</u> sein soll. Wir verlangen also, dass eine elliptische Function $\varphi(u, \omega_1, \omega_2)$ der folgenden Functionalgleichung genügen soll:

$$\varphi(\lambda u, \lambda \omega_1, \lambda \omega_2) = \lambda^r \varphi(u, \omega_1, \omega_2),$$

in welcher r den gemeinsamen Grad bezeichnet, in welchem jene 3 Grössen vorkommen. Wir haben es daraufhin nicht sowohl mit Functionen, sondern specieller mit „Formen" zu thun. Diesem Umstande wollen wir in der Bezeichnung Rechnung tragen; wir wollen, falls $r \gtrless 0$ ist, von <u>elliptischen Formen</u> sprechen und wollen als <u>elliptische Functionen</u> nur diejenigen bezeichnen, für welche $r = 0$ ist.

In Folge der verabredeten Homogenität können wir übrigens man

3 Argumente auf 2 reduciren. Dividiren wir nämlich unsere Form r^{ten} Grades $\varphi(u, \omega_1, \omega_2)$ durch ω_2^r und führen wir die neuen Grössen $v = \frac{u}{\omega_2}$ und $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ ein, so haben wir

$$\varphi(v, \omega, 1) = \frac{1}{\omega_2^r}\ \varphi(u, \omega_1, \omega_2).$$

Die Gleichung

$\varphi(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \varphi(u, \omega_1, \omega_2)$, welche die Invarianteneigenschaft der elliptischen Formen ausspricht, nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\varphi\left(\frac{v + m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{\gamma\omega + \delta}, \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, 1\right) =$$
$$\left(\frac{1}{\gamma\omega + \delta}\right)^r \varphi(v, \omega, 1).$$

Wir werden jedoch von dieser inhomogenen Schreibweise im Allgemeinen keinen Gebrauch machen, weil, wie schon die vorstehende Gleichung zeigt, der Vorteil, mit zwei Variabeln auszukommen, nur durch Aufgeben der Symmetrie erkauft wird. Nur wenn das v gar nicht vorkommt, wenn wir also

eine sog. elliptische Modulfunktion oder Modulform haben, werden wir auf die vorstehende Gleichung wiederholt zurückkommen.

Zunächst wollen wir die einfachsten Repräsentanten der elliptischen Functionen aufstellen. Wir stellen uns also die Aufgabe; Invarianten unserer ternären Gruppe aufzufinden. Allgemein wird man dieses folgendermassen bewerkstelligen: Man geht von irgend einem Ausdruck in den u, ω_1, ω_2 aus, transformirt diesen mittelst aller Substitutionen der Gruppe und bildet eine symmetrische Function aller so erhaltenen Ausdrücke. Ist die Gruppe eine endliche, so hat dieses keine Schwierigkeit. Ist aber, wie in unserm Falle, die Gruppe unendlich, so muss man die Convergenz im Auge haben.

Gehen wir speciell von einer Potenz von u aus, u^{τ}, so erhalten wir nach dem angegebenen Verfahren eine Invariante der Gruppe in dem folgen-

den Ausdruck:

$$\Sigma_{(m_1, m_2)} \quad (u - m_1 \omega_1 - m_2 \omega_2)^{\nu},$$

wo m_1, m_2 alle Zahlen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ durchlaufen. In der That erkennt man, dass bei sämmtlichen Substitutionen unserer Gruppe die Glieder der Reihe nur untereinander verstellt werden. Ausserdem ist dieser Ausdruck homogen vom ν ten Grade. Der Convergenz wegen aber müssen wir festsetzen, dass $\nu \leqq 3$ genommen werde (vergl. die folgenden Ausdrücke für $\wp'$, g_2 und g_3). Soll aber $\nu > -3$ genommen werden, so müssen wir die Reihe erst durch Hinzufügung passender Glieder convergent machen. (vergl. die folgende Gleichung für $\wp$). In diesem Sinne ist die Darstellung der elliptischen Functionen von Eisenstein begonnen und von Weierstrass weiter ausgebildet worden. Die fundamentalen Functionen der Weierstrassischen Theorie sind die folgenden:

$$\wp(u, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u - m_1\omega_1 - m_2\omega_2)^2} - \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2}\right],$$

$$\wp'(u, \omega_1, \omega_2) = -2 \sum \frac{1}{(u - m_1\omega_1 - m_2\omega_2)^3},$$

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = 60 \cdot \sum \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4},$$

$$g_3(\omega_1, \omega_2) = 140 \sum \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^6}.$$

Diese Ausdrücke sind in unserer Terminologie elliptische Formen vom bezw. $-2, -3, -4, -6^{\text{ten}}$ Grade. Es zeigt sich, dass man die ähnlich gebildeten Summen von kleinerem ν auf die vorstehenden zurückführen kann.

Zwischen $\wp$, $\wp'$, g_2 und g_3 bestehen die folgenden Relationen:

$$\wp' = \frac{d\wp}{du}, \quad \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Aus g_2 und g_3 bilden wir noch eine weitere wichtige elliptische Form Δ, welche in der Weierstrassischen Theorie zurücktritt und nur gelegentlich unter der Bezeichnung G vorkommt. Man wird auf dieselbe

geführt, wenn man die rechte Seite der letzten Gleichung in Factoren zerlegt:

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$$

und die Discriminante der Gleichung

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 0$$

bildet. Die neue Grösse Δ ist bis auf einen Zahlenfactor gleich dieser Discriminante:

$$\Delta = 16(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2(e_2 - e_3)^2 = g_2^3 - 27g_3^2 = 16G.$$

Hiernach wird Δ eine elliptische Form vom Grade −12. Endlich bilden wir noch eine elliptische Function (Form 0ten Grades) oder, wie man in der Invariantentheorie sagt, eine absolute Invariante, indem wir setzen:

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta}, \text{ oder was dasselbe ist: }$$

$$J - 1 = \frac{27g_3^2}{\Delta}.$$

Unsere bisherige Definition der elliptischen Functionen, als Invarianten der ternären Gruppe, welche in ihren 3 Argumenten homogen sind, war

nur eine vorläufige. Wir bemerken nämlich, dass unter jene Definition auch Functionen fallen, welche als Functionen von u, ω_1, ω_2 alle möglichen Arten von Singularitäten haben. Wollen wir dieses ausschliessen, so müssen wir unsere Definition verengern. Wir sagen daher jetzt: *Wir verstehen fortan unter einer elliptischen Function nur eine rationale Function von $\wp, \wp', g_2$ und g_3, welche überdies der Homogenitätsregel Genüge leistet.* (Dass eine solche Function auch die oben geforderte Invarianteneigenschaft besitzt, versteht sich von selbst).

Dementsprechend verengern wir auch die frühere Definition des elliptischen Gebildes: *Wir verstehen fortan unter dem elliptischen Gebilde die Gesamtheit der rationalen Functionen von $\wp, \wp', g_2, g_3$.*

Dieser Begriff deckt sich daher mit dem Begriffe eines *Rationalitätsbereiches*. In unserem Falle ist der

Rationalitätsbereich fest-gelegt durch die Grössen p, g_2, g_3 zu welchen noch die Grösse p' als Wurzel der Gleichung $p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3$ adjungirt ist.

Wir werden jedoch neben dieser indirecten Definition der elliptischen Functionen eine independente Definition fordern, welche nicht auf die Darstellung derselben durch die p und p' .... zurückgreift. Zu dem Zwecke müssen wir uns zunächst die Bedeutung des Periodenparallelogramms noch klarer machen.

Das Periodenparallelogramm war ursprünglich vom gruppentheoretischen Standpunkte definirt. Es war der Inbegriff aller nichtaequivalenter Punkte der u-Ebene, d. h. derjenigen Werte, welche durch keine Substitution $u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ zusammenhängen. Das Periodenparallelogramm misst sonach die Discontinuität der Gruppe, es ist ihr Discontinuitätsbereich.

Betrachten wir es jetzt vom functionentheoretischen Standpunkt: In dieser Hin-

sicht wissen wir, dass eine doppelperiodische Function φ, welche zu dem Periodenparallelogramm gehört, in jedem Parallelogramm der Gitterteilung genau dieselben Werte annimmt, wie in jedem anderen. Das Periodenparallelogramm erschöpft also alle Werte, deren die Funktion φ fähig ist; es stellt ihren Fundamentalbereich dar.

Die beiden Begriffe: Discontinuitätsbereich der Gruppe - und - Fundamentalbereich der doppeltperiodischen Functionen fallen eben nothwendig zusammen.

Eine weitere Frage wird sein, wie oft eine doppelperiodische Function einen vorgegebenen Werte im Fundamentalbereiche annimmt. Man überzeugt sich insbesondere, dass p jeden Werth an 2 Stellen, p' jeden Werth an 3 Stellen des Periodenparallelogramms annimmt. Man zeigt ferner, dass das Wertepaar (p, p') jeden Wert im Periodenparallelogramm nur an einer Stelle annimmt (wobei natürlich nur solche Werte in Betracht kommen, wel-

che vermöge der Relation

$$p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3$$

überhaupt möglich sind.)

Wenn wir das Wertepaar p, p' betrachten wollen, so werden wir uns die Abhängigkeit von p und p' durch eine Riemann'sche Fläche vorstellen u. zw. können wir entweder über der p-Ebene, den zwei zugehörigen Werten von p' entsprechend, eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche construiren, oder über einer p'-Ebene, den 3 Werten von p entsprechend, eine dreiblättrige Fläche ausbreiten. Die eine oder die andere Fläche ist, dem Vorstehenden zufolge, eindeutig auf das Periodenparallelogramm bezogen. Das Periodenparallelogramm ist einfach das conforme Abbild der zwei- (oder drei-) blättrigen Riemann'schen Fläche.

Frei. d. 14. II. Jetzt ist es leicht, von der obigen indirecten zu einer directen Definition der elliptischen Functionen überzugehen, d. h. zunächst, soweit die Variable u in Betracht kommt. Indem wir

sagten: die elliptischen Functionen sind rationale Functionen von p und p', characterisirten wir sie durch ihr Verhalten auf der Riemann'schen Fläche (p, p'). Eine rationale Function ist nämlich, functionentheoretisch gesprochen, eine solche, welche nirgends wesentlich singulär ist, oder auch eine solche, welche jeden Wert nur eine endliche Anzahl von Malen annimmt. Unsere frühere Definition besagt also, dass die elliptischen Functionen auf der Riemann'schen Fläche (p, p') keine wesentlichen Singularitäten haben oder, was dasselbe ist, dass sie jeden Wert nur eine endliche Anzahl von Malen erreichen. Diese Eigenschaft überträgt sich nun aber sofort auf das Periodenparallelogramm. Wir können daher, was das u angeht, die folgende independente Definition aufstellen.

Eine elliptische Function ist eine solche homogene Invariante der ternären Gruppe, welche im Perioden

parallelogramm der u-Ebene keine wesentliche Singularität besitzt oder jeden Wert nur eine endliche Anzahl von Malen annimmt.

Damit ist unsere Definition aber noch nicht vollständig. Die elliptischen Functionen sind doch Functionen von 3 Argumenten u, ω_1, ω_2. Während durch das Vorstehende ihre Abhängigkeit von der Variabeln u präcisirt ist, bleiben uns jetzt noch ihre Eigenschaften in den $\omega_1\ \omega_2$ zu charakterisiren. Functionen, welche sich betreffs der Variabeln u in der angegebenen Weise verhalten, sind rationale Functionen von p und p'. Die Coefficientes dieser rationalen Functionen hängen ihrerseits von ω_1 und ω_2 ab; sie sind nach unserer obigen Bezeichnung Modulformen $\phi(\omega_1, \omega_2)$ und genügen der Functionalgleichung

$$\phi(\alpha\omega_1+\beta\omega_2, \gamma\omega_1+\delta\omega_2) = \phi(\omega_1, \omega_2).$$

Diese Gleichung ist aber zur Defi-

nition der Modulformen noch nicht ausreichend; sie entspricht hinsichtlich der Variabeln ω_1, ω_2 nur der allgemeinen Forderung, welche wir vorher hinsichtlich der Variabeln u aufsteckten, wonach die elliptischen Functionen in u doppelperiodisch sein sollten. Es müssen vielmehr noch Einschränkungen hinsichtlich des functionentheoretischen Characters der Modulformen hinzutreten, entsprechend dem Umstande, dass wir vorher in der Variabeln u das Auftreten von wesentlichen Singularitäten im Périodenparallelogramm ausschlossen. Dies geschah bereits oben durch die Festsetzung, dass die elliptischen Functionen auch von den g_2, g_3 rational abhängen sollten. Die Frage muss wieder sein, wie sich diese Bedingung independent ausdrückt, wenn wir ω_1, ω_2 als unabhängige Variable festhalten. Zu dem Zwecke beschränken wir uns zuvörderst auf Modulfunctionen im engeren Sinne, also auf Modulformen 0ten Grades. Die

selben sind direct Functionen von $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega$ und genügen als solche nach pg. 303 der Gleichung:

$$\phi(\omega) = \phi\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right).$$

Andrerseits werden sie rationale Functionen nicht nur von g_2, g_3, sondern direct von der absoluten Invariante J sein.

Wir verlegen jetzt die Betrachtung in die Ebene der Variabeln ω. Wie zerlegt sich diese Ebene entsprechend den Substitutionen

$$\omega = \frac{\alpha\omega'+\beta}{\gamma\omega'+\delta}$$

in Discontinuitätsbereiche? Wie verhält sich J im einzelnen Discontinuitätsbereiche? Und wie verhält sich eine beliebige rationale Function von J?

Haben wir dieses erledigt, so müssen wir noch ein besonderes Verfahren angeben, um von den Modulfunctionen zu den allgemeinenen Modulformen eines von Null verschiedenen Grades aufzusteigen.

Bei der Frage nach dem Discontinuitätsbereiche der ω-Ebene knüpfen wir an die Theorie der quadratischen Formen an, womit wir die damals abgeleiteten Resultate jetzt direct benutzen können. Nach pg. 299 oben ist das Periodenverhältnis $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$a\omega^2 + b\omega + c = 0.$$

Da a, b, c die Coefficienten einer definiten quadratischen Form sind, werden die beiden Wurzeln conjugirt imaginär. Wir schreiben deshalb $D = -\Delta$ und bezeichnen die Wurzel mit positivem bez. negativem imaginären Bestandtheil durch ω bez. $\bar{\omega}$:

$$\omega = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \bar{\omega} = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Wir betrachten jetzt die Ebene $a:b:c$ und die ω Ebene nebeneinander. Nach den vorstehenden Formeln gehört zu jedem Punkte der ersteren Ebene ein Punktepaar der zweiten Ebene. Setzen wir $\omega = x + iy$ und entsprechend $\bar{\omega} = x - iy$, so dass

x und y rechtwinkliche Coordinaten in der ω Ebene bedeuten, so bestimmt sich die Lage unseres Punktepaares durch die Gleichungen:

$$x = \frac{-b}{2a}\ ,\quad y = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Die beiden Punkte des Paares sind hiernach reell nur dann, wenn $\Delta > 0$, wenn also der Punkt a, b, c im Innern des fundamentalen Kegelschnitts liegt; sie fallen zusammen, wenn a, b, c auf den Rand rückt; sie werden imaginär, wenn der Punkt a, b, c sich ausserhalb des Kegelschnittes befindet.

Umgekehrt gehört zu jedem Punkte der ω - Ebene ein bestimmter Punkt der Ebene a, b, c. Berechnet man nämlich nach den vorstehenden Formeln x^2+y^2, so ergibt sich $x^2+y^2 = \frac{c}{a}$, worauf man die folgende Proportion aufschreiben kann:

$$a : b : c = 1 : -2x : x^2+y^2.$$

Dieselbe zeigt in der That, dass dem Punkte x, y ein ganz bestimmter Punkt $a : b : c$ entspricht. Die Beziehung

zwischen der ω-Ebene und der a, b, c-Ebene, so können wir sagen, ist eine ein-zweideutige Verwandtschaft.

Nun sind uns die Discontinuitätsbereiche in der a, b, c-Ebene, welche die Gruppe der $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ Collineationen entwirft, wohlbekannt. Da wir ferner auch den Zusammenhang der a, b, c-Ebene mit der ω-Ebene kennen, so werden wir jetzt die Gestalt der Discontinuitätsbereiche aus jener in diese Ebene umsetzen können. Hierzu dienen folgende Bemerkungen:

1. Dem fundamentalen Kegelschnitt der a, b, c-Ebene entspricht die reelle Axe der ω-Ebene, denn $D = 0$ ergibt nach pg. 317 $y = 0$.

2. Den Geraden der a, b, c-Ebene entsprechen in der ω-Ebene Kreise, welche ihren Mittelpunkt auf der reellen Axe haben und diese also senkrecht schneiden, denn aus der Gleichung $Aa + Bb + Cc = 0$ entsteht vermöge der obigen Proportion:

$$A - 2Bx + C(x^2 + y^2) = 0.$$

3. Den $\binom{\alpha\beta}{\gamma\delta}$-Collineationen in der Ebene $a : b : c$, welche den fundamentalen Kegelschnitt in sich transformiren, entsprechen in der ω-Ebene Kreisverwandtschaften, welche die reelle Axe ungeändert lassen. Dabei werden Kreise, welche die reelle Axe senkrecht schneiden, in ebensolche übergeführt. U. zw. verschieben Kreisverwandtschaften, welche den Collineationen $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ entsprechen, die reelle Axe gleichstimmig in sich; sie führen die positive ω-Halbebene in die positive über, dagegen verschieben diejenigen Kreisverwandtschaften, welche aus den Collineationen $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ hervorgehen , die reelle Axe ungleichstimmig in sich; sie vertauschen die positive mit der negativen Halbebene.

4. Die imaginären Tangenten des fundamentalen Kegelschnittes, welche von den Punkten des Kegelschnitt inneren auslaufen, verwandeln sich in die Minimallinien, welche

von den reellen Punkten der ω-Ebene ausgehen. (Wir denken uns hier also vorübergehend die a, b, c und ebenso die x, y der ω-Ebene selbst als complexer Werthe fähig). Sei nämlich $a_0\, b_0\, c_0$ irgend ein Punkt im Innern des Kegelschnittes. Die Berührungspunkte der von ihm ausgehenden Tangenten haben Parameterwerte ω, welche der Gleichung genügen $a_0\,\omega^2 + b_0\,\omega + c_0 = 0$. Sei ω_0 eine Wurzel dieser Gleichung, so lautet die Gleichung der zugehörigen Tangente $a\,\omega_0^2 + b\,\omega_0 + c = 0$, wo a, b, c die laufenden Coordinaten der Tangente sind. Dem variabeln Punkte a, b, c entspreche in der ω-Ebene der variable Wert ω, wobei $a\,\omega^2 + b\,\omega + c = 0$. Wir haben ersichtlich: $\omega = \omega_0$, oder, wenn wir ausführlich setzen $\omega = x + iy$, $\omega_0 = x_0 + iy_0$: $x + iy = x_0 + iy_0$. Hier gelten x, y, wie wir schon andeuteten, selbst als complexer Werte fähig. Unter dieser Voraussetzung haben

wir die Gleichung einer Minimalgeraden der w-Ebene, welche durch den reellen Punkt x_0, y_0 hindurchgeht. Ebenso entspricht der zweiten Tangente im Punkte a_0, b_0, c_0 die zweite Minimalgerade durch x_0, y_0.

5. Der Winkel, unter dem sich zwei Curven in der a, b, c - Ebene schneiden, gemessen im Sinne der Cayley'schen Maassbestimmung, ist gleich dem Winkel, unter dem sich die entsprechenden beiden Curven in der w - Ebene treffen, gemessen im elementaren Sinne. Der Cayley'sche Winkel war definirt durch $\frac{i}{2}$ multiplicirt mit dem Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches die beiden gegebenen Richtungen mit den Tangenten an den fundamentalen Kegelschnitt bilden. Nun ist unsere Beziehung zwischen der a, b, c - und der w - Ebene allerdings keine projective, bei der das Doppelverhältniss schlechtweg ungeändert bleibt. Indessen ist im Infinitesimalen eine jede Punkt-

transformation eine projective Beziehung. Bei der Messung des Winkels kommt es aber nur auf das Verhalten der Linienelemente im Schnittpunkte an. Das Doppelverhältnis jener 4 Richtungen in der a, b, c Ebene wird daher gleich dem Doppelverhältnis der 4 entsprechenden Richtungen in der ω - Ebene, d. h. der den gegebenen Curven entsprechenden Richtungen und der beiden Minimallinien durch ihren Schnittpunkt. Der Logarithmus dieser Grösse ist aber, noch multiplicirt mit $i/2$, direct gleich dem elementar gemessenen Winkel.

Do. d. 20. II. Hiernach ist es leicht, die ganze Dreiecksfigur aus der a, b, c-Ebene in die ω - Ebene zu übertragen. Wir grenzen zunächst dasjenige Gebiet ab, welches dem schraffirten Elementardreieck des reducirten Raumes aus unserer Dreiecksfigur entspricht. Dieses hatte zu Seiten die Geraden a = b, b = 0, a = c.

Nach der Proportion von pg 317 sind die entsprechenden Linien der w-Ebene durch die Gleichungen gegeben:

$$x = -\frac{1}{2},\ x = 0 \text{ und } x^2 + y^2 = 1;$$

sie grenzen in der w-Ebene zwei spiegelbildlich gleiche <u>Kreisbogendreiecke</u> ab, das eine in der positiven, das andere in der negativen Halbebene gelegen. Die elementar gemessene Winkel dieses Kreisbogendreiecks betragen, wie die Figur zeigt, bez. $\pi/3$, $\pi/2$ und 0. Dieselben Winkel besitzt, wie es sein muss, unser geradliniges Dreieck in der a, b, c-Ebene bei Cayley'scher Maass-

Bestimmung.

Nun entstand die ganze Dreiecksfigur aus dem reducirten Dreiecke dadurch, dass wir auf dieses die Operationen der Gruppe $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ausübten. Dieselben Operationen üben wir auf eines der beiden Kreisbogendreiecke, etwa auf das in der positiven Halbebene gelegene aus. Dabei entstehen nach 2) und 3) pg 318 und 319 unendlich viele Abbilder unseres Kreisbogendreiecks u. zw. liegen bei den Operationen von der Determinante +1 die sämmtlichen Abbilder in der positiven, bei denen von der Determinante −1 in der negativen Halbebene. Aber es bleiben noch neben jedem so erhaltenen Dreiecke Gebiete frei.

Beispielsweise können wir zu dem Spiegelbilde des anfänglichen Dreiecks in der negativen Halbebene nicht hingelangen. Überhaupt bleiben alle solche und nur solche Gebiete frei, welche Spiegelbilder der bisher construirten Kreisbo-

gendreiecke in Bezug auf die reelle Axe sind. Wir wollen alle bisher construirten Gebiete schraffiren und die bisher frei gebliebenen unschraffirt lassen.

Die Spiegelung an der reellen Axe bedeutet die Operation $x' = x$, $y' = -y$ bez. $\omega' = \bar{\omega}$. Setzen wir diese Operation mit einer Operation der $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ Gruppe zusammen, so ergiebt sich:

$$\omega' = \frac{\alpha\bar{\omega} + \beta}{\gamma\bar{\omega} + \delta}.$$

Durch alle Operationen dieser Art wird das Ausgangsdreieck successive in alle bisher frei gebliebenen Gebiete verwandelt.

Wir sprechen von der „<u>erweiterten</u>“ Gruppe, wenn wir gleichzeitig die Operationen

I.) $\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, $\omega = \frac{\alpha\bar{\omega}+\beta}{\gamma\bar{\omega}+\delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$

betrachten. Sie enthält als Untergruppen

II). $\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$; $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$

III). $\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, $\omega' = \frac{\alpha\bar{\omega}+\beta}{\gamma\bar{\omega}+\delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$.

und als fernere Untergruppe:

IV) $\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$.

Man bemerke wohl, dass das Wort „erweiterte Gruppe" hier in anderem Sinne gebraucht ist, wie bei den Betrachtungen in der a, b, c-Ebene. Die Erweiterung, welche wir soeben vornahmen, hat in der a, b, c-Ebene keinen Sinn, denn die Operation $X' = X$, $Y' = -Y$ bedeutet dort, wie aus der Proportion von pg. 317 hervorgeht, einfach die Identität.

Auch die Schraffirung haben wir in der ω-Ebene anders eingerichtet als in der a, b, c-Ebene. Es entsprechen nämlich die schraffirten Gebiete der positiven Halbebene den schraffirten, die schraffirten Gebiete der negativen Halbebene den nicht schraffirten Gebieten der a, b, c-Ebene. Dasselbe gilt für die nicht-schraffirten Gebiete der ω-Ebene. Der Grund

für diese Discordanz liegt darin, dass die Beziehung zwischen der a, b, c- und der ω-Ebene eine <u>ein-zweideutige</u> Verwandtschaft ist.

Das Resultat dieser Überlegungen ist folgendes: (wegen der genaueren Begründung verweisen wir auf „Modulf.". Bd. I pg 112 und 113):

<u>Unser ursprüngliches Kreisbogendreieck bildet den Discontinuitätsbereich der erweiterten Gruppe (I) für die ganze ω-Ebene. Gleichzeitig liefert es den Discontinuitätsbereich der Untergruppe III für die positive Halbebene. Dagegen bildet unser schraffirtes Ausgangsdreieck zusammen mit einem anliegenden nichtschraffirten Dreieck den Discontinuitätsbereich der Untergruppe II für das Gebiet der ganzen Ebene, den der Untergruppe IV für das Gebiet der positiven Halbebene.</u>

Die so eingeteilte ω-Ebene wird das geometrische Substrat sein, in welchem wir die elliptischen Mo-

dulfunctionen studiren. Hinsichtlich des hiermit besprochenen Überganges zur ω-Ebene bemerken wir jedoch noch Folgendes: An sich wäre es für unsere functionentheoretischen Zwecke gar nicht nötig gewesen, unsere geradlinige Figur in eine Kreisbogenfigur umzusetzen. Es geschieht dieses nur aus Connivenz gegen unsere Gewöhnung, indem wir uns eine complexe Grösse gerne in der Gaussischen Weise durch die rechtwinklichen Coordinaten eines Punktes repräsentirt denken. Im Grunde giebt aber auch unsere Dreiecksfigur eine völlig zureichende geometrische Darstellung des Complexen, da doch jeder complexe Wert von ω einem ganz bestimmten Punkte im Innern des Kegelschnittes zugeordnet ist, nämlich denjenigen Punkte, von welchem die Tangente mit dem Parameter ω an den fundamentalen Kegelschnitt gelegt werden kann. Wir brauchen uns dieses Innere nur mit zwei Blättern überdeckt zu denken, um

denselben Vortheil zu haben, den wir durch die Unterscheidung der positiven und negativen Halbebene ω erreichen. Uebrigens ist dieses doppelt überdeckte Kegelschnittsinnere nur ein specieller Fall der allgemeinen zu den ebenen algebraischen Curven gehörigen „projectiven" Riemann'schen Flächen, deren functionentheoretische Verwendung ich längst in Vorschlag gebracht habe. (Cfr. Vorl. über R. Fl. I pg 255).

Wir gehen nun zur Betrachtung der Modulfunctionen über. Zunächst genügt jede Modulfunction $\varphi(\omega)$ der Functionalgleichung:

$$\varphi(\omega) = \varphi\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right), \text{ wo } \alpha\delta-\beta\gamma=+1.$$

Daraus folgt: <u>Für unsere Modulfunctionen ist jeder Discontinuitätsbereich der Gruppe $\alpha\delta-\beta\gamma=+1$ Fundamentalraum</u>; d.h. die Modulfunctionen nehmen in jedem Discontinuitätsbereich der Gruppe dieselben Werte an, wie in jedem anderen. Fü's

Besondere nehmen sie auch in correspondirenden Randpunkten desselben Bereiches die gleichen Werte an. Gewöhnlich wählt man unter den sämmtlichen möglichen Fundamentalbereichen den auf der pg 331 gezeichneten aus. Derselbe besteht aus dem schraffirten Ausgangsdreieck von pg. 323 und dem längs der imaginaren Axe sich anlegenden Nebendreiecke. Die Zuordnung der Randpunkte ist durch Pfeile angedeutet; sie wird durch die Substitutionen vermittelt: $\omega = \omega' + 1$ und $\omega' = -\frac{1}{\omega}$.

Unter den Modulfunctionen betrachten wir zunächst die Function $J(\omega)$ genauer. Wir deuten uns ihre Werte in einer J-Ebene und fragen nach der Beziehung zwischen dieser und dem Fundamentalbereich der ω-Ebene. Die Theorie der Modulfunctionen lehrt (vergl. M. F I pg 114), dass diese Beziehung eine <u>eindeutig umkehrbare</u> ist, oder, anders ausgedrückt, <u>dass $J(\omega)$ jeden</u>

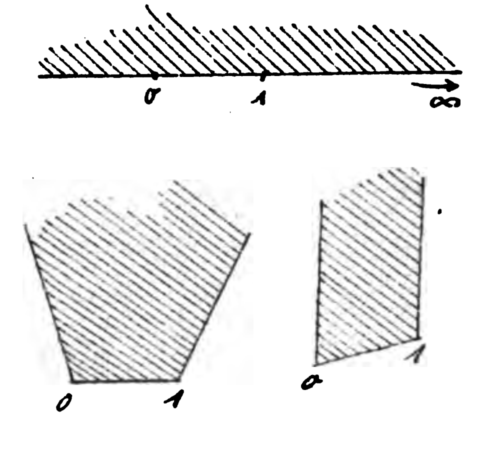
seiner Werte im Fundamentalbereiche einmal und nur einmal annimmt.

Wir vergleichen dieses Resultat mit dem, was wir früher über den Fundamentalraum der Gruppe $u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ d. h. über das Periodenparallelogramm abgeleitet haben.

Wir sahen, dass dieses geradezu ein conformes Abbild der Riemann'schen Fläche (p, p') war. Hier können wir entsprechend sagen: Der Fundamentalraum der ω-Ebene ist ein conformes Abbild der schlichten J-Ebene.

Die Dinge liegen also hinsichtlich der Variabeln ω im Grunde einfacher, als hinsichtlich der Variabeln u. Speciell zeigt sich, dass das schraffirte Dreieck des Fundamentalbereiches ein conformes Abbild der positiven

J-Ebene ist, wobei den Punkten J = 0, 1, ∞ die Ecken des Kreisbogendreiecks entsprechen, nämlich bez. die Punkte, in denen die zusammenstossenden Seiten die Winkel $\pi/3$, $\pi/2$ und 0 bilden. Wir können uns den Übergang von der positiven J-Ebene zu dem Kreisbogendreieck in der ω-Ebene wieder so denken, dass wir ihn als das Resultat einer gesetzmässigen continuirlichen Verzerrung ansehen, wie durch die nebenstehenden Figuren angedeutet wird.



Wir sprechen jetzt von Modulfunctionen im Allgemeinen. Wir definirten diese früher dadurch, dass wir sagten: es sind rationale Functionen von J. Dieses können wir auch so ausdrücken: die Modulfunctionen sind in der J-Ebene eindeutig und haben

nirgends einen wesentlich singulären Punkt. Wir geben nun die in Aussicht genommene independente Definition der Modulfunctionen, indem wir sie in der J-Ebene characterisiren. Wir sagen: Modulfunctionen sind solche eindeutige Functionen von ω, welche

1. die Functionalgleichung erfüllen

$$\varphi\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)=\varphi(\omega),$$

und welche

2. im Innern des einzelnen Fundamentalbereiches relativ zu diesem Bereich keinen wesentlich singulären Punkt haben.

Der Ausdruck: relativ zum Fundamentalbereich muss dabei noch näher präcisirt werden. Er soll etwas Anderes bedeuten, wie wenn wir sagen würden: relativ zur ω-Ebene: und deckt sich mit ihm nur im Allgemeinen, nämlich nur in solchen Punkten, wo der Fundamentalbereich selbst keine Besonderheiten aufweist. Um seine Bedeutung auch für die

Ecken festzulegen, müssen wir auf die J-Ebene zurückgreifen, in welcher ja die Modulfunctionen schlechtweg keine wesentliche singuläre Stelle haben sollten. Nun bildet sich die Umgebung der Punkte $J=0$ und $J=1$ zwar nicht conform, aber doch mit rationalem Winkelvergrösserungsverhältnis auf die ω-Ebene ab. Daraus folgt, dass auch in den Ecken unseres Dreiecks mit den Winkeln $\pi/3$ und $\pi/2$ das Auftreten von wesentlichen Singularitäten relativ zur ω-Ebene schlechtweg ausgeschlossen werden muss. Anders verhält es sich mit derjenigen Ecke, welche sich in's Unendliche erstreckt.

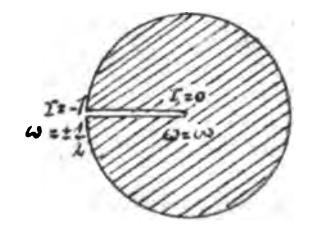
Wir fragen zunächst, wie sich J selbst in dieser Ecke verhält; gestattet J hier eine Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von $\frac{1}{\omega}$ mit nur einer endlichen Zahl negativer Potenzen? Das ist nicht der Fall, vielmehr hat J, als Function von ω, bei $\omega=\infty$ eine wesentlich singuläre Stelle. Man beherrscht aber diese

Singularität, indem man sie durch Einführung einer neuen Variabeln fortschaffen kann.

Diese Hülfsvariable ist

$$r = e^{2\pi i\omega};$$

(es ist dieselbe Grösse, welche in der Jacobi'schen Bezeichnungsweise q^2, in der Weierstrass'ischen h^2 heisst.) Was zunächst die Abbildung betrifft, welche in der ω-Ebene ensteht, wenn r unter Vermeidung eines von $r=0$ bei $r=\infty$ längs der negativen reellen Asoe laufenden Schnittes alle seine Werte einmal durchläuft, so besteht diese aus einem Parallelstreifen, welcher durch die in den Punkten $\omega = \pm\frac{1}{2}$ parallel zur imaginären Asoe gezogenen Geraden begrenzt wird, u. zw. entspricht der in der positiven ω-Ebene gelegene Halb-



streifen dem Inneren der in der negativen ω-Ebene gelegene Halbstreifen dem Aeusseren des Einheitskreises in der r-Ebene. Das Unendliche des positiven Halbstreifens entspricht dem Mittelpuncte des Einheitskreises, d. h. dem Werte $r = 0$.

Man kann nun $J(\omega)$ mittelst der Variabeln r in eine Reihe entwickeln, welche folgendermassen lautet (vergl. M. F. I pg 154):

$$J = \frac{1}{1728\,r} + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu r^\nu .$$

Aus dieser Reihe erkennen wir zweierlei: erstlich, dass J für $r = 0$ unendlich wird, und zweitens, dass es, als Function von r aufgefasst, nicht wesentlich singulär ist.

<u>Wir verlangen nun von den Modulfunctionen überhaupt, dass sie an der Stelle $\omega = \infty$, als Functionen von r aufgefasst, nicht wesentlich singulär sein sollen,</u> mithin nach aufsteigenden Potenzen von r entwickelt, nur eine endliche

Anzahl von negativen Potenzen von r besitzen dürfen. Dieses meinen wir, wenn wir sagen: die Modulfunktionen sollen „relativ zum Fundamentalbereiche", auch an der Stelle $\omega = \infty$ keine wesentliche Singularität haben. Uebrigens convergirt die angegebene Reihe für J für alle Werthe $|r| < 1$ und giebt damit eine Darstellung des J in der ganzen positiven Halbebene ω.

Frei. den 21. II. Längs der reellen Axe wird das Verhalten der Modulfunctionen ein sehr eigentümliches. Wenn wir nämlich unsere Einteilung der ω-Ebene nach der reellen Axe hin vervollständigen wollen, so erkennen wir, dass sich hier die Kreisbogendreiecke unbegrenzt häufen. Daraus folgt, dass die Modulfunction hier jeden Wert an unendlich vielen unmittelbar benachbarten Stellen annimmt. Jeder Punkt der reellen Axe wird daher ein wesentlich singulärer Punkt der Function. Man kann die Frage aufwerfen: Welchen Wert nimmt denn eigent-

lich die Modulfunction an einem bestimmten Punkte der reellen Axe selbst an? Dabei müssen wir zwischen den rationalen und den irrationalen Punkten unterscheiden. In jeden rationalen Punkt läuft ein Kreisbogendreieck (und sogar eine unendliche Zahl solcher Dreiecke) je mit einer Spitze aus. Nähern wir uns einem rationalen Punkt, indem wir senkrecht auf die reelle Axe zuschreiten, so bleiben wir in einem bestimmten Fundamentalbereiche; wir können daher auch von einem bestimmten Werte sprechen, welchen die Modulfunction bei der bestimmten Art der Annäherung in diesem Punkte annimmt. Dagegen passiren wir, wenn wir auf einen irrationalen Punkt in irgend einer Richtung zuschreiten, fortgesetzt neue Dreiecke. Es gibt daher keinen bestimmten Grenzwert, dem die Function in einem solchen Punkte zustrebt; die Function bleibt hier völlig unbestimmt.

Dies hat im Sinne der Weierstrass=

schen Functionentheorie zur Folge, dass man die Modulfunctionen über die reelle Axe nicht fortsetzen kann; sie bilden historisch das erste Beispiel einer Function mit „natürlicher Grenze".

Allerdings können wir, wenn uns irgend ein Ausdruck zur Berechnung einer Modulfunction gegeben ist, daraus möglicherweise ebensowohl Werte für ein ω der positiven, wie für eins der negativen Halbebene ableiten. So ist es z. B. für $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$, wenn wir für g_2^3 und $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ die oben gegebenen Partialbruchreihen eintragen. Die so entstehenden Werte von J gehören aber im Sinne der modernen Functionentheorie zu zwei ganz verschiedenen Functionen, welche nicht durch analytische Fortsetzung unter einander zusammenhängen. Hiernach stellt das Symbol $J(\omega)$ zwei verschiedene Functionen dar, von denen die eine in der positiven, die andere in der negativen Halbebene definirt ist. Ana-

log ist es mit allen unseren Modulfunctionen. Wir werden weiterhin unter $\mathcal{F}(\omega)$ immer die erstere von beiden verstehen, also voraussetzen, dass $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ einen positiv - imaginären Bestandtheil hat. Dies bringt dann mit sich, dass wir uns auf solche $\binom{\alpha\ \beta}{\gamma\ \delta}$ Substitutionen beschränken müssen, deren Determinante $= +1$, denn die anderen vertauschen die beiden Halbebenen a mit einander.

Wir beschäftigen uns nun mit den <u>Modulformen</u>. Diese sollten rationale Functionen von g_2 und g_3 sein, welche homogen sind, wobei wir g_2 das Gewicht -4 und g_3 das Gewicht -6 beizulegen hatten. g_2 und g_3 selbst, sowie die Discriminante Δ sind die einfachsten Modulformen. Ihre Darstellung in den Variabeln ω_1, ω_2 wurde pg 306 mitgeteilt.

Wenn wir Functionen der beiden unabhängigen Variabeln ω_1 und ω_2 betrachten wollen, so liegt es zunächst nahe, die Variabeln in R_4

zu deuten. Hinsichtlich der Substitutionengruppe:

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$$
$$\omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

zerlegt sich dieser R_4' in eine Reihe von Discontinuitäts-bereichen. Es wäre nun die Frage, wie man die Modulformen und ins Besondere, wie man g_2 und g_3 functionentheoretisch durch ihr Verhalten in einem einzelnen dieser Bereiche characterisiren könnte. Dieser directe Weg zum Studium der Modulformen ist indessen bisher nicht mit Erfolg eingeschlagen worden, er scheint erhebliche Schwierigkeiten zu haben. Dasselbe ist aber auch nicht nöthig, da wir nur homogene Functionen von ω_1, ω_2 suchen. In Folge dessen können wir die ganze Untersuchung indirect in die ω-Ebene selbst verlegen. Wir geben zunächst ein Verfahren an, durch welches man von $J(\omega)$ zu den Formen g_2 und g_3 aufsteigen kann.

Zu dem Zweck betrachten wir den Differentialquotienten $\frac{d\,\mathfrak{J}(\omega)}{d\omega}$ und sehen zu, wie sich derselbe bei den Substitutionen $\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ verhält. Zunächst haben wir die Gleichung:

$$\mathfrak{J}(\omega') = \mathfrak{J}(\omega).$$

Durch Differentiation folgt, da $\frac{d\omega'}{d\omega} = \left(\frac{1}{\gamma\omega+\delta}\right)^2$ ist:

$$\frac{d\,\mathfrak{J}(\omega')}{d\omega'}\,\frac{1}{(\gamma\omega+\delta)^2} = \frac{d\,\mathfrak{J}(\omega)}{d(\omega)}.$$

Multipliciren wir hier mit $\frac{1}{\omega_2^2}$ und berücksichtigen, dass $\omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$, so haben wir

$$\frac{d\,\mathfrak{J}(\omega')}{d\omega'}\,\frac{1}{\omega_2'^2} = \frac{d\,\mathfrak{J}(\omega)}{d\omega}\cdot\frac{1}{\omega_2^2}$$

Wir sind somit zu einer Form

$\varphi(\omega_1,\omega_2) = \frac{d\mathfrak{J}}{d\omega}\,\frac{1}{\omega_2^2}$ gekommen, welche homogen vom -2ten Grade in ω_1, ω_2 ist und welche bei den Substitutionen von pg 341 gänzlich ungeändert bleibt. <u>Dieses φ wird daher als Modulform zu bezeichnen sein.</u>

Es gelingt nun, mit Hülfe dieser

Form $\mathfrak{C}$ und der Function J die anderen Modulformen zusammenzusetzen, wie die folgenden Formeln zeigen:

$$g_2 = \frac{\pi^2}{3J(1-J)}\,\mathfrak{C}^2$$

$$g_3 = \frac{\pi^3 i}{27J^2(1-J)}\,\mathfrak{C}^3$$

$$\Delta = \frac{\pi^4}{27J^4(1-J)^3}\,\mathfrak{C}^6 .$$

(vergl. Hierzu M. F. I pg).

Aus diesen Formeln können wir das Verhalten von g_2, g_3 und Δ bei beliebigen Werten von ω_1 und ω_2 ablesen, wobei wir nur, wie es bei homogenen Variabeln stets geschehen muss, das gleichzeitige Verschwinden sowie das gleichzeitige Unendlichwerden von ω_1 und ω_2 ausschliessen. Zunächst zeigt sich, dass alle 3 Grössen im Innern der ω-Halbebene nirgends unendlich werden. Denn die Werte $J=0$ und $J=1$ sind, wie aus der Lagerung unserer Dreiecksteilung hervorgeht, dreifache bez. zweifache

Werte der Function $J(\omega)$. Daher verschwindet der Differentialquotient und also auch $\varphi(\omega)$ an diesen Stellen von der zweiten bez. ersten Ordnung. Das Nullwerden des Nenners wird daher bei unseren Ausdrücken für g_2, g_3, Δ durch das Nullwerden des Zählers aufgehoben, ja es bleibt für g_2 und g_3 bei $J=0, 1$ noch je eine einfache Nullstelle übrig. Man erkennt auch aus der Dreiecksteilung, dass die genannten Stellen (die Ecken der Dreiecksteilung) die einzigen Nullstellen von $\varphi(\omega)$ im Innern der Halbebene sind. Daraus ergiebt sich die folgende Zusammenstellung (NB. für das Innere der Halbebene):

g_2 wird Null in den Ecken vom Winkel $\pi/3$
und nur in diesen

g_3 " " " " " vom Winkel $\pi/2$
und nur in diesen

Δ wird nirgends Null.

Zugleich sind sämmtliche Nullstellen von g_2 und g_3 einfache Nullstellen.

Wir orientiren uns ferner über das

Verhalten unserer Formen in den rationalen Punkten der reellen Axe. Dabei können wir uns auf den Punkt $\omega = \infty$ oder $\omega_2 = 0$ beschränken, weil jeder andere rationale Punkt $\omega = \gamma/\delta$ durch eine Substitution unserer Gruppe nach dem Punkte $\omega = \infty$ transformirt werden kann, wobei die Modulform ungeändert bleibt. Wir führen, ebenso wie bei der Untersuchung von J im Punkte $\omega = \infty$ die Hülfvariable $r = e^{2\pi i \omega}$ ein; man kann dann folgende Reihenentwikkelungen aufstellen (vergl. M. F. I pg 153 und 154).

$$g_2 \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^4 = \frac{1}{12} + 20 \sum \frac{m^3 r^m}{1 - r^m}$$

$$g_3 \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^6 = \frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum \frac{m^5 r^m}{1 - r^m}$$

$$\Delta \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{12} = r \,\Pi' (1 - r^m)^{24}$$

Do. den 27. II. Die rechten Seiten dieser Ausdrücke können wir uns für die Umgebung der Stelle $\omega_1 = 0$ oder, was dasselbe ist, der Stelle $r = 0$ in convergente Reihen nach steigenden Po=

tenzen von r umgeordnet denken; wir bezeichnen sie dementsprechend mit $\mathfrak{P}(r)$ und zwar bleiben diese $\mathfrak{P}(r)$ bei $r = 0$ endlich. Dagegen werden die Grössen g_2, g_3, Δ selbst bei der Annäherung an den Punkt $\omega_2 = 0$ unendlich gross u. zw. wird die Art des Unendlich-Werdens allgemein zu reden gemessen durch einen Ausdruck von der Form

$$\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^r \mathfrak{P}(r).$$

Ganz analoges gilt von jedem rationalen Punkte $\rho\omega_1 + \sigma\omega_2 = 0$ auf der reellen Axe, wie wir nicht ausführen, da jeder solche Punkt durch eine Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ nach ∞ geworfen werden kann.

Diese Eigenschaft überträgt sich sofort auf die Modulformen überhaupt, welche ja rationale Functionen von g_2 und g_3 sein sollten, auch diese verhalten sich bei $\omega_2 = 0$ wie $\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^r \mathfrak{P}(r)$, wo nun aber $\mathfrak{P}(r)$ eine endliche Zahl negativer Potenzen enthalten kann. Fürs Besondere werden wir die ganzen Modulformen bevorzugen, welche als

ganze rationale Functionen von g_2 und g_3 definirt sind. Wir sind jetzt in der Lage, dieselben independent durch ihr Verhalten im Fundamentalbereiche zu charakterisiren, ohne auf ihre Darstellung durch g_2 und g_3 zurückzugreifen. Unsere Definition wird lauten:

1. Die ganzen Modulformen $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ sind homogene Functionen von ω_1 und ω_2. (Ihr Grad sei $-r$.)

2. Sie erfüllen die Functionalgleichung:

$$\varphi(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = \varphi(\omega_1, \omega_2).$$

3. Sie sind im Innern der positiven ω-Halbebene nirgends singulär, also überall endlich.

4. Sie verhalten sich bei der Annäherung an den unendlich fernen Zipfel des Fundamentalbereiches wie

$$\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^r \mathfrak{P}(r),$$

wo in $\mathfrak{P}(r)$ nur positive Potenzen von r auftreten.

Umgekehrt schliesst man, dass eine Function, welche diesen Bedin-

gungen genügt, eine ganze rationale Function von g_2 und g_3 ist. Es deckt sich also die neue Definition mit der früheren. Legt man Wert darauf, dass in den Reihenentwickelungen nach r nur ganze Zahlen als Coefficienten auftreten, so wird man nicht die Grössen g_2, g_3 selbst, sondern $\gamma_2 = 12 g_2$ und $\gamma_3 = 216 g_3$ zu Grunde legen. Die Discriminante Δ erfüllt die Forderung ganzzahliger Coefficienten von selbst; sie ist mit γ_2 und γ_3 durch die Gleichung verbunden: $1728\Delta = \gamma_2^3 - \gamma_3^2$. Von diesem Standpunkte aus empfiehlt es sich auch statt der absoluten Invariante J die Function $j = \frac{\gamma_2^3}{\Delta} = 1728 J$ einzuführen. Die *ganzen ganzzahligen Modulformen* im Allgemeinen werden wieder durch die Bedingungen 1) bis 4) definirt, wobei der 4. Bedingung hinzuzufügen ist, dass in der Reihe $P(r)$ nur ganzzahlige Coefficienten auftreten. Man erkennt, dass diese ganzen ganzzahligen Modulformen ganze ganzzahlige Functionen von γ_2, γ_3 und Δ sind (welch'

letzteres sich hier selbständig neben f_2 und f_3 stellt, da es sich aus f_2 und f_3 nur mit dem Nenner 1728 zusammensetzen lässt.)

Wir gehen nun auf die Bedeutung der elliptischen Functionen für unseren eigentlichen Gegenstand, für die Zahlentheorie ein. Es handelt sich ausschliesslich um negative Discriminanten. Wir unterscheiden dabei drei Stufen unserer bisherigen arithmetischen Entwickelungen:

1. Auf der obersten Stufe beschäftigen wir uns mit den Gitterzahlen d.h. mit gewissen complexen Zahlen, welche den Eckpunkten eines beliebigen Parallelgitters in der Gaussischen Ebene zugeordnet sind. Sind ω_1 und ω_2 diejenigen complexen Zahlen, welche den Endpunkten der von 0 auslaufenden Seiten des ersten Parallelogrammes zukommen, so ist die allgemeine Form der Gitterzahlen

$$\omega_1 x + \omega_2 y.$$

Die Bezeichnung wird praktischer Weise von vorneherein so eingerichtet, dass $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ einen positiven imaginären Bestandtheil hat. Da die Definition der Gitterzahlen an die Punkte des Gitters, nicht an die Parallellinien desselben anknüpft, so wird man alle zu demselben Punktgitter gehörige Parallelgitter als gleichwerthig ansehen. Dem entspricht dass man alle Grössen ω_1', ω_2' als gleichwerthig ansieht, welche mit ω_1, ω_2 durch die Substitutionen verbunden sind.

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \alpha\omega_1' + \beta\omega_2' \\ \omega_2 &= \gamma\omega_1' + \delta\omega_2' \end{aligned}\right\} (\alpha\delta - \beta\gamma) = +1,$$

wobei wir uns auf die Det. +1 beschränken, damit die Verabredung betr. den imaginären Teil von ω aufrecht erhalten bleibt.

2. Auf der zweiten Stufe betrachten wir die definiten <u>quadratischen Formen</u> welche als Normen der Gitterzahlen definirt sind:

$ax^2 + bxy + cy^2 = (\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$

Es sind dies insbesondere die <u>positiven</u> quadratischen Formen.

Den vorstehenden Substitutionsformeln entsprechend interessirt uns dabei weniger die einzelne Form, als die Classe aequivalenter Formen.

3. Auf der dritten Stufe untersuchen wir nicht die quadratische Form, sondern die <u>quadratische Gleichung</u>.

$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ bez. $a\omega^2 + b\omega + c = 0$.

Bei diesem Standpunkte werden nicht die Zahlen a, b, c selbst, sondern nur die Verhältnisse $a : b : c$ in Betracht gezogen.

Bei 1. kommt von unserem geometrischen Bilde <u>die ganze Figur des Punktgitters nach Lage und Grösse</u> zur Geltung. <u>Bei 2. kommt es nur auf die Gestalt, nicht auf die Orientirung des Gitters an</u>. Wenn wir nämlich das Punktgitter um O beliebig drehen, also $e^{i\varphi}(\omega_1 x + \omega_2 y)$ an Stelle von $\omega_1 x + \omega_2 y$ und entsprechend $e^{-i\varphi}(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$ an Stelle

von $\overline{\omega}_1 x + \overline{\omega}_2 y$ setzen, so hat dieses auf die Norm der Gitterzahlen keinen Einfluss. Bei 3. bleibt ausser der Lage auch die absolute Grösse der Gittermaschen willkürlich. Wenn wir nämlich die ganze Gitterfigur in dem Verhältnisse ϱ verkleinern, so werden die Zahlen a, b, c durch $\varrho a, \varrho b, \varrho c$ ersetzt. Dadurch wird aber die Gleichung $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ nicht geändert.

Andrerseits gehört zu jedem Gitter ein System elliptischer Functionen mit den Perioden ω_1, ω_2, welches ungeändert bleibt, wenn wir ω_1, ω_2 durch ein aequivalentes Paar ω_1', ω_2' ersetzen. Wir behaupten aber mehr. Die Gleichheit gewisser elliptischer Functionen zieht die Aequivalenz der Perioden nach sich. Die elliptischen Functionen versehen uns so mit den vollen analytischen Invarianten unserer zahlentheoretischen Gebilde. Des Genaueren stellt sich die Sache so: Von dem Standpunkte 1. sind g_2 und g_3 die vollen Invarianten des Punktgitters, so dass, wenn g_2 und g_3, gebildet

für 2 Periodenpaare, übereinstimmen, die zu den Periodenpaaren gehörigen Punktgitter nach Gestalt und Lage identisch sind.

Auf dem Standpunkte 2) sind ausser $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ Norm (g_2) und Norm (g_3) diese Invarianten. Dass durch die Gleichheit der absoluten Invarianten sowie der Normen die Orientirung der Punktgitter noch nicht festgelegt sein kann, ist von vornherein klar. Wenn wir nämlich das Punktgitter um ϑ drehen, also ω_1 und ω_2 durch $e^{i\vartheta}\omega_1$ und $e^{i\vartheta}\omega_2$ ersetzen, so wird wegen der Homogenitätseigenschaft von g_2 und g_3 sowohl J wie Ng_2 und Ng_3 nicht verändert.

3. Von dem dritten Standpunkte aus ist $J(\omega)$ die einzige Invariante in dem Sinne, dass die Gleichung $J(\omega) = J(\omega')$ zur Folge hat, dass ω und ω' Wurzeln von zwei aequivalenten quadratischen Gleichungen sind, dass also

$$\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta} \quad .$$

Beim Beweise dieser Behauptungen beginnen wir mit dem Falle 3). Wir wissen, dass $F(\omega)$ in seinem Fundamentalbereiche jeden Werth nur einmal annimmt. In der ω-Ebene hat daher $F(\omega)$ denselben Werth nur für solche Punkte, welche an aequivalenten Stellen verschiedener Fundamentalbereiche liegen. Aus der Gleichung $F(\omega) = F(\omega')$ folgt also $\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}$. Die Punktgitter sind ähnlich, aber nicht nothwendig ähnlich gelegen und gleich. Darauf stützen wir uns beim Beweise der Behauptungen ad 2) und 1).

Wir haben jedenfalls: $F\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = F\left(\frac{\omega_1'}{\omega_2'}\right)$. Hieraus ergiebt sich, wie wir sahen:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\alpha\omega_1' + \beta\omega_2'}{\gamma\omega_1' + \delta\omega_2'}$$

oder, homogen geschrieben:

$$\varrho\,\omega_1 = \alpha\omega_1' + \beta\omega_2'$$
$$\varrho\,\omega_2 = \gamma\omega_1' + \delta\omega_2'.$$

Nun ist aber

$$g_2(\varrho\,\omega_1, \varrho\,\omega_2) = \varrho^{-4} g_2(\omega_1, \omega_2)$$

und

$$g_3(\varrho\omega_1, \varrho\omega_2) = \varrho^{-6} g_3(\omega_1, \omega_2);$$

ferner haben wir

$$g_2(\omega_1', \omega_2') = g_2(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \gamma\omega_1 + \delta\omega_2) = g_2(\varrho\omega_1, \varrho\omega_2),$$

also

$$g_2(\omega_1'; \omega_2') = \varrho^{-4} g_2(\omega_1, \omega_2)$$

und ebenso

$$g_3(\omega_1', \omega_2') = \varrho^{-6} g_3(\omega_1, \omega_2).$$

Im Falle 1.) lautet die Voraussetzung $g_2(\omega_1' \omega_2') = g_2(\omega_1 \omega_2)$ und $g_3(\omega_1' \omega_2') = g_3(\omega_1, \omega_2)$. Dann ergiebt sich

$$N(\varrho^2) = 1 \text{ oder } \varrho = \pm 1.$$

In diesem Falle sind die Periodenpaare direct aequivalent, u. zw., wenn $\varrho = +1$, mittelst der Substitution $\binom{\alpha\ \beta}{\gamma\ \delta}$, wenn $\varrho = -1$, mittelst $\binom{-\alpha, -\beta}{-\gamma, -\delta}$. Die Punktgitter sind also völlig identisch.

Im Falle 2) setzen wir nun voraus $Ng_2(\omega_1', \omega_2') = Ng_2(\omega_1, \omega_2)$ und $Ng_3(\omega_1', \omega_2') = Ng_3(\omega_1, \omega_2)$. Daraus folgt mit Rücksicht auf das Vorstehende:

$N\rho^2 = 1$, also $\rho = e^{i\varphi}$.

In diesem Falle sind die Periodenpaare ω_1, ω_2 und ω_1', ω_2' also bis auf die Orientirung aequivalent; Die Punktgitter sind der Gestalt nach identisch, nur der Lage nach sind sie eventl. gegen einander gedreht.

Wie man sieht, ist der eigentliche Kernpunkt dieser fundamentalen Sätze, dass J im Fundamentalbereiche der ω-Ebene jeden Werth gerade einmal annimmt (dass dieser Fundamentalbereich direct eine eindeutige Abbildung der J-Ebene ist).

Frei. d. 28. II. Wir haben uns jetzt mit derjenigen systematischen Auffassung der elliptischen Functionen vertraut zu machen, welche in den Vorlesungen über Modulfunctionen entwickelt ist.

Die bisher betrachteten elliptischen Functionen waren definirt als Invarianten der Gruppe

$$\begin{cases} u' = u + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 \\ \omega_1' = \alpha \omega_1 + \beta \omega_2 \\ \omega_2' = \gamma \omega_1 + \delta \omega_2 , \end{cases}$$

welche relativ zu dem Discontinuitätsbereich der Gruppe keine wesentlichen Singularitäten besitzen. Wir erweitern jetzt die Theorie dahin, dass wir auch die Untergruppen dieser Gesammtgruppe in Betracht ziehen. Dabei aber soll es sich nur um Untergruppen von endlichem Index handeln. Wir suchen dann die eindeutigen, homogenen Invarianten dieser Untergruppen auf, welche relativ zu dem betr. Discontinuitätsbereiche keine wesentliche Singularität besitzen. Diese Invarianten sind elliptische Functionen im weiteren Sinne. Während die bisherigen Functionen rationale Functionen von p, p', g_2 und g_3 waren, erweisen sich diese neuen Functionen als algebraisch von p, p', g_2 und g_3 abhängig. Damit soll natürlich nicht gesagt sein, dass alle algebraischen Functionen

dieser Grössen elliptische Functionen seien, vielmehr entsteht die Frage, welche algebraischen Functionen von p, p', g_2 und g_3 als Invarianten einer unserer Untergruppen erhalten werden können. Wiederum kann man die ganzen algebraischen Functionen bevorzugen und kann die Forderung hinzufügen, dass nur ganzzahlige Coefficienten in ihren Entwickelungen auftreten sollen.

Die Theorie hat nun der Reihe nach folgende Aufgaben zu erledigen:

1. Alle Untergruppen der ternären Gruppe aufzuzählen.

2. Die zugehörigen Discontinuitätsbereiche anzugeben.

3. Die Functionen zu bilden, welche die Discontinuitätsbereiche zu Fundamentalbereichen haben und relativ zu denselben keine wesentlichen Singularitäten besitzen.

4. Die algebraischen Beziehungen zu untersuchen, in welchen diese Functionen zu den $p, p', g_2\, g_3$ stehen.

Ich will mich hier, wie in den Vorle-

sungen" geschieht einen Augenblick auf Modulfunctionen, also die binäre Gruppe der ω-Substitutionen beschränken. In dieser Hinsicht wurde etwa Folgendes angeführt:

Von den Untergruppen sind die „Congruenzgruppen" am besten untersucht, das sind solche, welche aus der Gruppe

$$\omega_1 = \alpha\,\omega_1' + \beta\,\omega_2'$$
$$\omega_2 = \gamma\,\omega_1' + \delta\,\omega_2'$$

durch Congruenzen ausgeschieden werden, denen man die Coefficienten ihrer Substitutionen unterwirft. Speciell bezeichnet man als „Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe" diejenige Gruppe deren Substitutionen modulo n der Identität congruent sind. Die Coefficienten ihrer Substitutionen genügen den Bedingungen

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha \equiv 1\,, & \beta \equiv 0 \\ \gamma \equiv 0\,, & \delta \equiv 1 \end{array}\right\} (\mathrm{mod}\ n).$$

Ein Beispiel für eine umfassendere

Congruenzgruppe n^{ten} Stufe liefert die Bedingung:

$$\beta \equiv 0 \pmod{n}.$$

In der That überzeugen wir uns leicht, dass die so characterisirten Substitutionen allemal eine Gruppe bilden.

Die zu Congruenzgruppen gehörigen Invarianten nennen wir Modulfunktionen n^{ter} Stufe.

Wollen wir nun umgekehrt auf die Substitutionen des u eingehen:

$$u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2,$$

indem wir die ω Substitutionen bei Seite lassen.

Hier sind die Untergruppen besonders leicht anzugeben. Sie ergeben sich, indem wir ω_1, ω_2 durch irgend welche ganzzahligen Combinationen Ω_1, Ω_2 ersetzen und enthalten die Substitutionen:

$$u' = u + m_1\Omega_1 + m_2\Omega_2,$$

wo

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_2 \\ \Omega_2 = c\omega_1 + d\omega_2 \end{array}\right\}$$ (a, b, c, d ganze Zahlen von irgend welcher Determinante $ad - bc = N$).

Der Discontinuitätsbereich besteht wieder aus einem Parallelogramme; Ω_1, Ω_2 sind die Ecken des Parallelogrammes. Die Gesammtheit der Discontinuitätsbereiche liefert wieder eine Gittertheilung der Ebene, welche, wie wir uns ausdrücken, der ursprünglichen Gittertheilung eingelagert ist. Das einzelne Elementarparallelogramm des neuen Gitters ist N-mal so gross, wie das des alten. Mit $P\ P'\ G_2\ G_3$ bezeichnen wir solche Functionen, welche zu dem neuen Gitter in derselben Beziehung stehen, wie $p\ p'\ g_2\ g_3$ zu dem alten. Man wird dann nach der algebraischen Abhängigkeit fragen, welche P, P'.. u. p, p'.. verknüpft. Diese Frage nennt man das allgemeine Transformationsproblem N^{ter} Ordnung.

Besondere Fälle des allgemeinen Problems ergeben sich wenn die Zahlen a, b, c, d gemeinsame Theiler besitzen. Die äusserste Specialisirung ist die, dass wir einen Theiler n

herausheben können:

$$\Omega_1 = n(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)$$

$$\Omega_2 = n(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2),$$

von der Beschaffenheit, dass wieder $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ wird. Dann ist gleichzeitig $N = n^2$. Statt der vorstehenden können wir dann ebensogut die mit ihr aequivalente Transformation betrachten:

$$\left.\begin{array}{l}\Omega_1 = n\omega_1\\ \Omega_2 = n\omega_2\end{array}\right\}.$$

Diesen speciellen Fall bezeichnet man als Multiplication der Perioden.

Bei der Multiplication haben wir mit Rücksicht auf die Homogenität der elliptischen Functionen:

$$P = p(u, n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^2}\, p\left(\frac{u}{n}, \omega_1, \omega_2\right)$$

$$P' = p'(u, n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^2}\, p'\left(\frac{u}{n}, \omega_1, \omega_2\right)$$

$$G_2 = g_2(n\omega_1, n\omega_2) = \frac{1}{n^4}\, G_2(\omega_1, \omega_2)$$

$$G_3 = g_3(n\omega_1 + n\omega_2) = \frac{1}{n^6}\, G_3(\omega_1, \omega_2).$$

Bei der Multiplication stimmen also bis auf einen Zahlenfactor $\frac{1}{n^r}$ die G_2, G_3 mit den g_2, g_3 direct überein und die $\wp, \wp'$ mit den p, p', gebildet für ein durch n getheiltes Argument.

Die Functionen $p(n)$, $p'(n)$ sind nicht nur in dem Fundamentalbereiche ω_1, ω_2 sondern auch in dem Bereiche Ω_1, Ω_2 elliptische Functionen, und lassen sich als solche durch die einfachsten zu diesem Bereiche gehörigen Functionen, d. i. durch $\wp$ und $\wp'$ rational darstellen. Man kommt dann zu Formeln

$$(p, p') = \text{Rat}(\wp, \wp'),$$

welche man „Multiplicationsformeln" nennt. Umgekehrt stellen sich $\wp$ und $\wp'$ algebraisch durch p und p' dar. Diese umgekehrte Behandlung nennt man die <u>Theilung der elliptischen Functionen</u>. Analog stellt sich neben die vorhin betrachtete <u>directe</u> Transformation der elliptischen Functionen die <u>inverse</u> Trans-

Theorie:

1. Modulformen der zweiten Stufe erhält man hier aus der Gleichung

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 0,$$

nämlich deren Wurzeln e_1, e_2, e_3. Man pflegt ins besondere die Differenzen $e_i - e_k$ zu betrachten.

Diese e_i, bez. $e_i - e_k$ sind, wie man aus ihrem Zusammenhange mit den g_2, g_3 ersieht, von der -2ten Dimension. Eine Modulfunction der zweiten Stufe erhält man daraus durch Quotientenbildung. Diese Modulfunction ist der Legendre'sche Modul, oder vielmehr das Quadrat desselben:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Geometrisch bedeutet k^2 das Doppelverhältnis der vier Verzweigungspunkte e_1 e_2 e_3 ∞ auf der Riemann'schen Fläche $(\wp, \wp')$. An diese Bedeutung soll die Bezeichnung λ welche in den „Modulf." für k^2 benutzt wird, erin-

nern. Bei den Vertauschungen der vier Verzweigungspunkte nimmt das Doppelverhältnis im Ganzen 6 verschiedene Werte an. Der einzelnen Vertauschung entspricht eine Transformation erster Ordnung der Perioden, also eine Substitution aus unserer Gruppe $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$. Gegenüber den Substitutionen der Gesammtgruppe ist daher der Legendre'sche Modul 6 verschiedener Werte fähig, was mit dem Index (6) der Hauptcongruenzgruppe 2ter Stufe übereinstimmt.

2. In der Weierstraß'schen Theorie kommen ferner Ausdrücke vor von der Form:

$$\sqrt{p(u)-e_\lambda}.$$

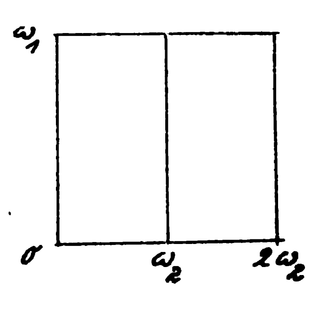
Dieselben sind, ebenso wie $p(u)$, eindeutige doppeltperiodische Functionen von u; ihr Periodenparallelogramm ist aber doppelt so gross wie das ursprüngliche. (Beispielsweise gehört zu

$$\sqrt{p(u)-e_1}$$

das nebenstehende Parallelo-

gramm.)

Unsere Ausdrücke entstehen daher durch eine Transformation zweiter Ordnung.



Andrerseits sind die Ausdrücke

$$\sqrt{e_i - e_k}$$

eindeutige Functionen von ω_1, ω_2; es sind Modulformen von der -1ten Dimension und der 4ten Stufe.

3. Die <u>Jacobi'schen Functionen</u> setzen sich aus den eben genannten Bestandteilen in folgender Weise zusammen.

$$\sin am(z, k) = \sqrt{e_1 - e_3} : \sqrt{\wp(u) - e_3}$$

$$\cos am(z, k) = \sqrt{\wp(u) - e_1} : \sqrt{\wp(u) - e_3}$$

$$\Delta\, am(z, k) = \sqrt{\wp(u) - e_2} : \sqrt{\wp(u) - e_3}.$$

$$z = \sqrt{e_1 - e_3} \cdot u$$

Sie sind bez. von der 4ten, 2ten und 2ten Stufe. Dieser Umstand sowie die vorstehenden Formeln zeigen deutlich, wie unsymmetrisch und von unserm Standpunkte un-

zweckmässig die Jacobi'schen Functionen gewählt sind.

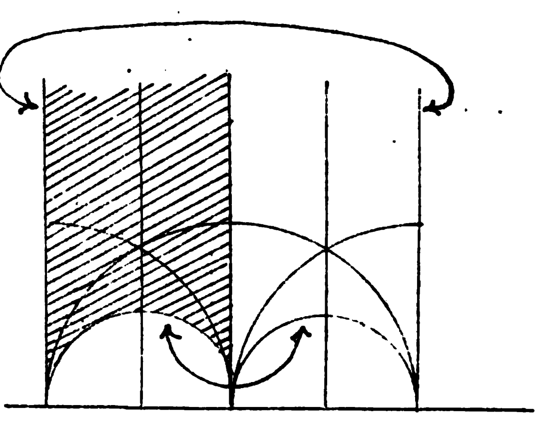
Ferner aber aus den Entwickelungen der „Modulfunctionen":

1. Die Hauptcongruenzgruppe zweiter Stufe kann uns als Modell für die Untersuchung der höheren Congruenzgruppen dienen; sie ist in diesem Sinne Abschnitt II Cap 4 der „Modulfunctionen" ausführlich besprochen. Ihr Index ist gleich 6; die Hauptcongruenzgruppe 2' Stufe umfasst sozusagen den 6ten Teil der Substitutionen der Gesammtgruppe.

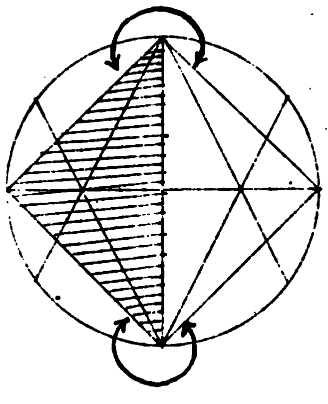
Dementsprechend besteht der Discontinuitätsbereich aus 6 Discontinuitätsbereichen der Gruppe $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ bez. aus 12 Discontinuitätsbereichen der „erweiterten" Gruppe.

In der ω-Ebene kann man ihn in der aus der nebenstehenden Figur ersichtlichen Weise abgrenzen

Viel übersichtlicher aber wird seine Gestalt in der a, b, c-Ebene,



wie überhaupt die geradlinige Figur vor der Kreisbogenfigur entschieden den Vorzug verdient. Hier ist nämlich der Discontinuitätsbereich zweiter Stufe ein Quadrat, welches sich aus den beiden in der Mittellinie



zusammenstossenden „Constructionsdreiecken" zusammensetzt. Durch die „Hülfslinien" zerfallen letztere in je 6 Elementardreiecke entsprechend den 2×6 Kreisbogendreiecken der ω-Ebene.

Wir erwähnten bereits, dass das Doppelverhältniß λ eine Modulfunction der 2ten Stufe ist; λ nimmt daher

alle seine Werte in dem genannten Bereiche an. Darüber hinaus zeigt sich nun aber, dass λ im Discontinuitäts bereiche zweiter Stufe jeden Wert nur einmal annimmt. Man kann daher diesen Bereich geradezu als conformes Abbild der λ-Ebene betrachten; der positiven λ-Halbebene entspricht dabei die eine (in den Figuren schraffirte) Hälfte dieses Bereiches. In Folge dessen wird die Function λ(ω) die charakteristische Invariante unserer Untergruppe in demselben Sinne, wie $J(\omega)$ die characteristische Invariante der Gesammtgruppe liefern. Wir können nämlich aus der Gleichung $\lambda(\omega) = \lambda(\omega')$ sofort auf die folgende Gleichung schliessen:

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}, \text{ wo } \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \text{ mod } 2.$$

In der That nimmt λ(ω) an denjenigen Stellen, welche vermöge der Hauptcongruenzgruppe 2ter Stufe

aequivalent sind, und was das Wichtigere ist, nur an diesen Stellen die gleichen Werte an.

2. Bei den Congruenzgruppen höherer Stufen werden wir in entsprechender Weise zunächst den Index der Untergruppe, dann ihren Discontinuitätsbereich bestimmen. Letzterer setzt sich aus einzelnen Discontinuitätsbereichen der Gesammtgruppe zusammen, wobei die Anzahl derselben durch den Index der Untergruppe angegeben wird.

Hierbei greift eine sehr wichtige Unterscheidung Platz, welche an die Zuordnung der Randcurven anknüpft. Die Pfeile, welche wir an unsern Figuren anbringen, weisen darauf hin, dass wir die Discontinuitätsbereiche unserer Gruppen als geschlossene Flächen aufzufassen haben, indem wir uns die zugeordneten Randcurven zusammengebogen denken. Dabei kann sich entweder <u>eine geschlossene Fläche vom Character der Kugelfläche ($p=0$)</u> ergeben, oder:

eine Fläche von höherem Zusammenhange. Die Riemann'sche Theorie der algebraischen Functionen lehrt nun, dass die Flächen der ersteren Art conform auf die Kugel bez. die schlichte Ebene abgebildet werden können. Bezeichnen wir mit μ eine complexe Variable, welche in gewöhnlicher Weise in dieser Ebene ausgebreitet ist, so stellt $\mu(\omega)$ eine Modulfunction dar, welche in dem betr. Discontinuitätsbereiche der ω-Ebene jeden Wert nur einmal annimmt. Wir bezeichnen eine solche Function als Hauptmodul. Die fundamentale Eigenschaft des Hauptmoduls ist die, dass jede andere Modulfunction des betr. Bereiches eine rationale Function des Hauptmoduls ist. Dahingegen kann man der Riemann'schen Theorie zufolge die Flächen mit $p>0$ nicht auf die schlichte Ebene, sondern nur auf eine mehrfach überdeckte Ebene, eine Riemann'sche Fläche abbilden, welche

zu derselben Zahl p gehört. Die einzelne Stelle der Riemann'schen Fläche wird aber nicht durch eine complexe Variable μ, sondern nur durch die Zusammenstellung zweier Variablen (μ, μ') festgelegt, welche algebraisch von einander abhängen. Dementsprechend werden die Modulfunctionen eines Bereiches von höherem Zusammenhange nicht mehr rational durch eine, sondern durch zwei Functionen $(\mu(\omega), \mu'(\omega))$ ausdrückbar, zwischen denen eine algebraische Relation besteht. Im Falle $p > 0$ gibt es also keinen Hauptmodul. Diese fundamentalen Begriffe sind im 8ten Abschnitte der „Modulf." auseinandergesetzt. Sie treten natürlich nicht nur bei den Modulfunctionen, sondern überhaupt bei den eindeutigen Functionen eines beliebigen Fundamentalbereiches, also auch beispielsweise bei den elliptischen Functionen in ihrer Abhängigkeit von u, in Kraft.

Die bisher von uns betrachteten Fundamentalbereiche liefern in der That bereits geschlossene Flächen mit $p=0$ und $p>0$. Zu der ersteren Kategorie gehört der Fundamentalbereich der Gesammtgruppe der $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ Substitutionen und der der Hauptcongruenzgruppe 2ter Stufe. Dementsprechend lernten wir in den Functionen $J(\omega)$ und $\lambda(\omega)$ Modulfunctionen kennen, welche in den bez. Fundamentalbereichen jeden Wert nur einmal annehmen. Alle andern Modulfunctionen des betr. Bereiches lassen sich durch diese „Hauptmoduln" rational ausdrücken, wie wir bereits sagten. Andrerseits giebt das Periodenparallelogramm der u-Ebene bei der Zusammenbiegung eine geschlossene Fläche vom Character des Ringes, eine Fläche mit $p=1$. Dementsprechend giebt es keine Function, welche im Periodenparallelogramm jeden Wert nur einmal annimmt. Dagegen kennen wir

2 Funktionen $\wp(u)$ und $\wp'(u)$, welche zusammengenommen die einzelnen Punkte des Periodenparallelogrammes in eindeutiger Weise festlegen und welche dieses conform auf die Riemann'sche Fläche $(\wp, \wp')$ abbilden. Wollen wir die allgemeineren doppeltperiodischen Funktionen des Periodenparallelogramms rational darstellen, so brauchen wir dazu beide Funktionen $\wp$ und $\wp'$!

3. Bei der Untersuchung der folgenden Stufen (d.h. der jedesmaligen <u>Hauptcongruenzgruppen</u>) zeigt sich dass <u>die Fundamentalbereiche der 3ten, 4ten, 5ten Stufe noch $p=0$, die der höheren Stufen aber $p>0$ besitzen.</u> Daher haben wir bei der 3ten, 4ten und 5ten Stufe Hauptmoduln, welche bez.

$$\lambda(\omega),\ o(\omega),\ \xi(\omega)$$

heissen, und durch welche sich die übrigen Modulfunktionen der betr. Fundamentalbereiche rational ausdrücken. In's Besondere kann die

Function $\mathcal{F}(\omega)$ selbst als Modulfunction der 2ten, 3ten 4ten und 5ten Stufe aufgefasst werden. Daher ist F eine rationale Function sowohl von λ, μ, o als von ξ.

Umgekehrt hängen diese Functionen ihrerseits algebraisch von F ab. Die Art dieser Abhängigkeit ist von anderer Seite her wohlbekannt. Es sind nämlich die Irrationalitäten, welche sich bei der Darstellung von λ, μ, o und ξ durch F ergeben, keine anderen, als die Irrationalitäten der regulären Körper u. zw. ist

$\lambda(\mathcal{F})$ die Dieder-Irrationalität für $n=3$,
$\mu(\mathcal{F})$ – Tetraeder – "
$o(\mathcal{F})$ – Oktaeder – "
$\xi(\mathcal{F})$ – Ikosaeder – "

Es ist dies ein sehr merkwürdiger Zusammenhang, dem wir leider nicht weiter nachgehen können.

4. Die Tendenz der „Modulfunctionen" ist nun geradezu, neben dem $\mathcal{F}$ der Weierstrassischen und dem λ der Jacobi'schen Theorie die Moduln hö-

herer Stufen, welche sonst in der Litteratur ziemlich vernachlässigt werden, also ins Besondere die Tetraeder-, die Octaeder- und die Ikosaeder-Irrationalität systematisch zu berücksichtigen. Dieselbe Forderung werden wir auch nach der zahlentheoretischen Seite stellen. Man sollte die Theorie der singulären elliptischen Gebilde nicht einseitig für die J und λ entwerfen, wie es bisher geschehen ist, sondern sollte auch die μ, o und ξ in Betracht ziehen. Das kann nicht schwer sein und wird doch viel Interesse bieten. Quadratische Formen (a, b, c) werden dabei nur insofern als aequivalent gelten, als sie durch Substitutionen $\binom{\alpha\;\beta}{\gamma\;\delta}$ in einander übergehen, die modulo 3, bez. 4 oder 5 zur Identität congruent sind. Dieselbe Festsetzung ist in Bezug auf den Zahlenmodul 2 bereits von Kronecker u. A. überall da getroffen worden, wo es sich um λ (ω) handelt.

6. Der Uebergang von Modulfunctionen niederer zu solchen höherer Stufe kann in besonderen Fällen durch Wurzelziehen bewerkstelligt werden. Diese Bildungsweise der Modulfunctionen ist von besonderer Wichtigkeit; sie soll daher an einzelnen Beispielen erläutert werden.

Ausgehend von dem Legendre'schen Modul λ bildet man

$$\sqrt[2]{\lambda}\ ,\ \sqrt[4]{\lambda}\ ,\ \sqrt[8]{\lambda}\ .$$

Es zeigt sich, dass diese Functionen in der ω - Ebene eindeutig und Modulfunctionen bez. von der

4ten, 8ten, 16ten Stufe

sind. Ferner zeigt sich, dass man auch aus dem Ausdrucke $\lambda(\lambda-1)$ eine Reihe von Wurzeln ausziehen kann, so dass sich Congruenzmoduln ergeben. Es werden nämlich

$$\sqrt[2]{\ },\ \sqrt[3]{\ },\ \sqrt[4]{\ },\ \sqrt[6]{\ },\ \sqrt[8]{\ },\ \sqrt[12]{\ },\ \sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$$

eindeutige Modulfunctionen

bez. von der

4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

Stufe. Dieselben treten ebenfalls in der Litteratur ausserordentlich viel auf, insbesondere kommt $\sqrt[8]{\lambda(\lambda-1)}$ bei Weber unter der Bezeichnung $f(\omega)$ vor.

In ähnlicher Weise verfährt man mit der Discriminante Δ, welche eine Modulform der ersten Stufe und, wie aus der Darstellung

$$\Delta = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} r \prod (1-r^m)^{24}$$

hervorgeht, der -12ten Dimension ist. Man betrachtet nämlich die Modulformen $\Delta, \sqrt[2]{\Delta}, \sqrt[3]{\Delta}, \sqrt[4]{\Delta}, \sqrt[6]{\Delta}, \sqrt[12]{\Delta}$ von der Dimension $-12, -6, -4, -3, -2, -1$ und der Stufe $1, 2, 3, 4, 6, 12.$ –

6. Wir suchen uns von dem der Bildung dieser Ausdrücke zu Grunde liegenden Princip, soweit es in Kürze geschehen kann, Rechenschaft zu geben. Dass man zunächst bei Δ mit dem Wurzelzeichen nur bis $\sqrt[12]{\Delta}$ gehen darf,

sofern man eindeutige Functionen von ω_1, ω_2 erhalten will, ist klar, da ja $\sqrt[2]{\Delta}$ bereits von der Dimension -1 ist. Dass man aber wirklich so weit gehen darf, ohne dass man zu vieldeutigen Functionen kommt, ergiebt sich aus der vorstehenden Productdarstellung von Δ, die doch für den ganzen in Betracht kommenden Bereich $|r| < 1$ convergirt. Wir können hier nämlich die 2te, 3te, 4te, 6te, 12te Wurzel teils in rationaler Form, teils bei dem Factor r in transcendenter Form ausziehen, indem

$$\text{z. B. } r^{1/12} = e^{\frac{2i\pi\omega_1}{12\omega_2}} = e^{\frac{i\pi\omega}{6}}$$

eine eindeutige Function von ω_1 und ω_2 wird. Was die angegebenen Stufenzahlen betrifft, so müssen wir uns mit einem Hinweise auf die „Modulf." (Bd. I pg. 623) begnügen.

Bei den Ausdrücken in λ liegen die Verhältnisse etwas anders.

Man erkennt nämlich (aus der Dreiecksteilung der ω-Ebene) dass jede beliebige Wurzel aus λ eine eindeutige Function von ω darstellt. Das gilt insbesondere auch für den $\lg \lambda$, den wir ja als eine unendlich hohe Wurzel auffassen können. Wir können daher den Ausdruck $\sqrt[r]{\lambda}$ (r beliebig) als eine Modulfunction bezeichnen. Dieselbe stellt aber im Allgemeinen keinen Congruenzmodul dar. Vielmehr beweist man (vergl. Modulf. Bd I pg. 656), dass nur im Falle $r = 2, 4$ und 8 Congruenzmoduln der oben angegebenen Stufenzahlen erhalten werden. Desgleichen ergiebt sich hinsichtlich der Grösse $\lambda(\lambda-1)$, dass nur die oben angegebenen Wurzeln Congruenzmoduln liefern.

Noch möge der Zusammenhang von $\sqrt[r]{\lambda}$ und $\sqrt[2r]{\lambda(\lambda-1)}$ mit der Discriminante Δ angeführt werden. Man findet in dieser Hinsicht (vergl. Modulf. II pg 66) die Darstel-

lung:

$$\sqrt[8]{-\lambda} = \sqrt[24]{\frac{\Delta(\frac{\omega_1}{2}, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \frac{\omega_2}{2})}}, \quad \sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)} = \sqrt[24]{\frac{16\,\Delta(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \frac{\omega_2}{2})}};$$

dieselbe zeigt, dass $\sqrt[8]{-\lambda}$ und $\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$ auf Wurzeln aus transformirten Δ zurückkommen.

7. Für die hier betrachteten Wurzelfunctionen scheint eine eigene Terminologie am Platze. Wir sagen, dass $\sqrt[r]{\Delta}$ ($r = 2, 3, 4, 6, 12$) sich bei den Substitutionen der 1ten Stufe im Allgemeinen verändert und daher einer höheren Stufe angehört. Die Aenderung kann aber nur in dem Hinzutreten von 2., 3., 4., 6., 12ten Einheitswurzeln bestehen. Diese Grössen stehen daher mit der 1ten Stufe in einem engeren Zusammenhange als die allgemeinen Modulfunctionen der betr. Stufe. Wir wollen diese Grossen <u>der 1ten Stufe adjungirt</u> nennen. Ebenso werden wir die angegebenen Wurzeln aus λ und $\lambda(\lambda-1)$ <u>der</u>

<u>2ten Stufe adjungirt</u> nennen, weil sie bei allen Substitutionen der 2ten Stufe sich nur um Einheitswurzeln verändern. Auch diese Auffassung entspricht der Riemann'schen Theorie der algebraischen Functionen, in welcher in der That neben den Functionen, die auf einer Riemann'schen Fläche eindeutig sind, in erster Linie solche vieldeutige Functionen der Fläche betrachtet werden, die sich bei Umläufen um Einheitswurzeln ändern.

Den Schluss dieser Vorlesung mögen einige Bemerkungen zu dem Werke über Modulfunctionen bilden, welche die Stellung der Verfasser zu dem in dem Buche verfolgten Plane wiedergeben.

Das Werk beschäftigt sich ja fast ausschliesslich mit den Modulfunctionen, betrachtet also die elliptischen Functionen durchaus in ihrer Abhängigkeit von den ω, während die Abhängigkeit von u

zurückgedrängt wird. Hierin wollen Sie nur einen Akt ausgleichender Gerechtigkeit erblicken. Während nämlich die bisherigen Darstellungen die Abhängigkeit der elliptischen Functionen von den Perioden in ungebührlicher Weise vernachlässigten, schien es vorteilhaft, einmal diese Seite der Theorie vornehmlich hervorzukehren. Schliesslich muss die allgemeine Auffassung die sein, dass die elliptischen Functionen solche dreier Variablen u, ω_1, ω_2 sind, wobei man nur nach Bedürfnis bald die eine, bald die andere dieser Variabeln voranstellt.

Eine zweite Bemerkung soll sich auf die dem Buche zu Grunde liegende Systematik, auf die Einteilung nach Untergruppen und zugehörigen Invarianten, insbesondere also die Stufeneinteilung beziehen. Diese Systematik hat gestattet, eine grosse Reihe der bei den elliptischen Functionen hervortretenden Beziehungen un-

der einheitliche und übersichtliche Gesichtspunkte zu bringen und in der Fülle der Formeln Ordnung zu stiften. Aber die Natur der Dinge ist allemal reicher als jedes noch so vollkommene System. Auch hier bleibt ein Rest von elliptischen Beziehungen übrig, der in das System nicht hineinpassen will; nach Aufrichtung des Systems werden gerade diese Beziehungen ein besonderes Interesse beanspruchen. Denn in ihnen liegen die Keime weiterer Entwickelung.

Dies möge nach einer Seite hin näher ausgeführt werden. Wir wollen die Produktformel für die Discriminante folgendermassen schreiben:

$$\Delta = \left(\frac{2}{\omega_2}\right)^{12} \varphi(\omega), \quad \varphi(\omega) = r \, \Pi(1-r^{n})^{24}$$

und die Function $\varphi(\omega)$ in's Auge fassen. Dieselbe ist in unserer Terminologie überhaupt keine Modulfunction; denn sie ändert

sich bei sämmtlichen Substitutionen der Modulgruppe. Da Δ selbst ungeändert bleibt, so haben wir in der That:

$$\varphi\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)=\left(\frac{\gamma\omega_2+\delta}{2\pi}\right)^{12}\Delta(\omega_1,\omega_2)$$
$$=(\gamma\omega+\delta)^{12}\cdot\varphi(\omega).$$

Allgemeiner werden wir nun solche Functionen in Betracht ziehen, welche sich bei unsern Substitutionen um irgend eine Potenz von $\gamma\omega+\delta$ ändern, wobei wir auch gebrochene Potenzen nicht ausschliessen. Es zeigt sich, dass eine solche Function sehr wohl in der Variabeln ω eindeutig sein kann, was wir allerdings festhalten wollen. Sei nämlich

$$\phi_\nu(\omega)=\sqrt[\nu]{\varphi(\omega)}=r^{1/\nu}\,\Pi(1-r^m)^{\frac{24}{\nu}}=e^{\frac{2i\pi\omega}{\nu}}\cdot\Pi(1-r^m)^{\frac{24}{\nu}}.$$

Hier können wir jeden Factor des Productes nach dem Binom entwickeln und dann das ganze

Product in eine Potenzreihe nach r ordnen, die für $|x| < 1$ convergirt und also eine in der positiven ω-Halbebene eindeutige Function ergibt. Während wir von dem früheren Standpunkte aus bei Δ nur die Wurzeln $r = 2, 3, 4, 6, 12$ zuliessen, kann r jetzt jede Zahl bedeuten. Die neue Function $\phi_r(\omega)$ genügt der Functionalgleichung:

$$\phi_r\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right) = (\gamma\omega+\delta)^{\frac{12}{r}}\, \phi_r(\omega).$$

Wir sehen uns durch diese Gleichung vor ein merkwürdiges Problem gestellt. Wie soeben gezeigt wurde, haben nämlich die Ausdrücke ϕ_r ganz bestimmte eindeutige Werte. Daher muss auch der an sich im Allgemeinen r-wertige Ausdruck $(\gamma\omega+\delta)^{12/r}$ in unserer Gleichung eine eindeutig-bestimmte Bedeutung haben. Es gilt also, aus den sämmtlichen möglichen Werten dieses Ausdrucks in jedem

Falle denjenigen auszusondern, der in der vorstehenden Gleichung gemeint ist. Es kommt dies darauf hinaus, dass wir jeder Substitution $\binom{\alpha\beta}{\gamma\delta}$ eine Einheitswurzel zuordnen, also auf eine durchaus zahlentheoretische Frage.

In dem Werke über Modulf. ist diese Frage bei Seite gelassen; dagegen spielt sie anderweitig in der Litteratur eine wichtige Rolle, nämlich im Falle $r=8$ in der Theorie der ϑ-Functionen und im Falle $r=24$ in den Arbeiten von Dedekind und Weber, wo die betr. Function $\sqrt[24]{\varphi(\omega)}$ mit $\eta(\omega)$ bezeichnet wird.

Nehmen wir geradezu $r=\infty$, so tritt $\lg\varphi(\omega)$ als eine wichtige Modulfunction im erweiterten Sinne in die Betrachtung ein; auch sie ist in ω eindeutig. Die Functionalgleichung

$$\lg\varphi\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)=12\lg(\gamma\omega+\delta)+\lg\varphi(\omega)$$

setzt wieder eine an sich vielden-

tige (u. zw. hier unendlich vieldeutige) Function mit eindeutigen Functionen in Beziehung. Es entsteht also die interessante Frage, nach welchem Gesetz aus den unendlich vielen Werten des Logarithmus derjenige ausgesucht werden muss, welcher der vorstehenden Gleichung genügt.

In der Litteratur tritt die Function $\lg \eta(\omega)$ beispielsweise in der Kronecker'schen Grenzformel auf, welche wir im Sommer kennen lernen werden.

Hiermit schliessen wir unsere kurze Digression über die elliptischen Functionen, bez. elliptischen Modulfunctionen. Wir haben ja nichts Vollständiges geben können. Aber vielleicht sind unsere Bemerkungen doch geeignet, soweit in die Theorie einzuführen, dass die erste Schwierigkeit, welche der ausserst weitschichtige Stoff darzubieten pflegt, überwunden ist.

An Ihnen wird es nun sein, während der Osterferien den so gewonnenen Ansatz durch speciellere Studien zu entwickeln. In der That werden wir im Sommersemester gar nichts machen können, wenn es uns nicht gestattet sein soll, hier und dort auf die Theorie der elliptischen Functionen zu recurriren.

Ausgewählte Kapitel
der
Zahlentheorie II.

Vorlesung,

gehalten im Sommersemester 1896

von

F. Klein.

Ausgearbeitet von A. Sommerfeld und Ph. Furtwängler.

GÖTTINGEN 1897.



Inhaltsverzeichnis.



Einleitung.

Do. 23.4.96. Unsere Hauptaufgabe im kommenden Semester wird es sein, dem wunderbaren Zusammenhange nachzugehen, welcher zwischen der Theorie der definiten binären quadratischen Formen und der Theorie der elliptischen Functionen besteht. Der Zusammenhang wird unmittelbar verdeutlicht durch die gemeinsame geometrische Vorstellung des Gitters, welche wir in dem ersten Theile dieser Vorlesung der Behandlung der quadratischen Formen zu Grunde legten und welche sich beim Studium der elliptischen Functionen von selbst darbietet. Indem wir bei unserem Gitter die Punkte und nicht die verbindenden Geraden als das wesentliche ansahen, kamen wir dazu, in der Zahlentheorie das Äquivalenzproblem voranzustellen und alle diejenigen Formen als gleichwerthig in eine Klasse zusammenzufassen, welche zu demselben Punktgitter gehö-

ren. In der Functionentheorie entspricht diesem Standpuncte, daß wir die elliptischen Functionen nicht allein durch die Periodicität in der Variabeln u definiren, sondern daß wir auch ihre Abhängigkeit von den Perioden ω_1, ω_2 betrachten und sie durch ihr Verhalten gegenüber den linearen Periodentransformationen

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1' = \alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_2 \\ \omega_2' = \gamma\,\omega_2 + \delta\,\omega_2 \end{array}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

characterisiren. Die elliptischen Functionen sind hiernach Functionen dreier Variabeln u, ω_1, ω_2, welche durch gewisse Invarianteneigenschaften ausgezeichnet sind.

Wir sehen uns jedoch gezwungen, in der Folge noch einen Schritt weiter zu gehen; wir werden nur solche elliptischen Functionen untersuchen, in denen u überhaupt nicht vorkommt, werden uns also auf elliptische Modulfunctionen beschränken. Wir haben schon gegen Ende des vorigen

Semesters betont, dass wir diese Beschränkung, welche ja auch in den „Vorlesungen über Modulfunctionen" zu Grunde liegt, an sich durchaus nicht für wünschenswerth halten. Sie bringt es mit sich, dass sehr interessante Abschnitte der Theorie, so die Theilung der elliptischen Functionen, die allgemeine Transformationstheorie, nicht zur Sprache kommen werden. Indessen ist bei der Kürze der Zeit eine gewisse Auswahl des Stoffes durchaus geboten. Alles dieses wurde schon zum Schlusse des vorigen Semesters in seinen allgemeinen Umrissen erläutert, und es wurde auch schon betont, nach welcher Seite sich das besondere Interesse wendet. Die Sache ist folgende:

In der Zahlentheorie ist man gewohnt, die Coefficienten der quadratischen Form als ganzzahlig vorauszusetzen; gerade die wichtigsten Resultate der Theorie beziehen sich auf diesen Fall. Dementsprechend

werden wir unter den elliptischen Gebilden insbesondere solche betrachten, welche zu ganzzahligen quadratischen Formen gehören, in dem Sinne, daß die Norm der allgemeinsten Periode des Gebildes

$$(\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$$

gleich einer Form

$$a x^2 + b x y + c y^2$$

mit ganzzahligen Coefficienten wird. Diese Gebilde nennt man nach dem Vorgange von Kronecker singuläre elliptische Gebilde. Es wird sich für uns darum handeln, die besonderen Eigenschaften kennen zu lernen, welche die singulären elliptischen Gebilde gegenüber der Periodentransformation n^{ter} Ordnung.

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1 = A\omega_1 + B\omega_2 \\ \Omega_2 = C\omega_1 + D\omega_2 \end{array}\right\} AD - BC = n$$

aufweisen. Man bezeichnet diesen Gegenstand gewöhnlich kurzweg als die complexe Multiplication

der elliptischen Functionen. Die Bezeichnung rührt daher, daß unter den genannten Transformationen solche vorhanden sind, welche in einer Multiplication der Perioden mit einer complexen Zahl bestehen und daß diese besondere Transformation durch die Abhandlungen von Abel zuerst bekannt geworden ist.

Die Lehre von der complexen Multiplication bildet nach der allgemeinen Ansicht der Mathematiker einen der schönsten und zugleich einen der schwierigsten Theile unserer Wissenschaft. So konnte Camille Jordan in der Einleitung zu seinem Traité des Substitutions die von Kronecker aufgestellten Theoreme „l'envie et le désespoir des géomètres" nennen. Ich hoffe, Ihnen zeigen zu können, daß infolge der in der Neuzeit erreichten Fortschritte keine eigentliche Schwierigkeit mehr mit dem Gegenstande verbunden ist, man vielmehr die

werden wir unter den elliptischen Gebilden insbesondere solche betrachten, welche zu ganzzahligen quadratischen Formen gehören, in dem Sinne, dass die Norm der allgemeinsten Periode des Gebildes

$$(\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$$

gleich einer Form

$$a x^2 + b x y + c y^2$$

mit ganzzahligen Coefficienten wird. Diese Gebilde nennt man nach dem Vorgange von Kronecker singuläre elliptische Gebilde. Es wird sich für uns darum handeln, die besonderen Eigenschaften kennen zu lernen, welche die singulären elliptischen Gebilde gegenüber der Periodentransformation n^{ter} Ordnung.

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1 = A\omega_1 + B\omega_2 \\ \Omega_2 = C\omega_1 + D\omega_2 \end{array}\right\} AD - BC = n$$

aufweisen. Man bezeichnet diesen Gegenstand gewöhnlich kurzweg als die complexe Multiplication

der elliptischen Functionen. Die Bezeichnung rührt daher, daß unter den genannten Transformationen solche vorhanden sind, welche in einer Multiplication der Perioden mit einer complexen Zahl bestehen und daß diese besondere Transformation durch die Abhandlungen von Abel zuerst bekannt geworden ist.

Die Lehre von der complexen Multiplication bildet nach der allgemeinen Ansicht der Mathematiker einen der schönsten und zugleich einen der schwierigsten Theile unserer Wissenschaft. So konnte Camille Jordan in der Einleitung zu seinem Traité des Substitutions die von Kronecker aufgestellten Theoreme „l'envie et le désespoir des géomètres" nennen. Ich hoffe, Ihnen zeigen zu können, daß infolge der in der Neuzeit erreichten Fortschritte keine eigentliche Schwierigkeit mehr mit dem Gegenstande verbunden ist, man vielmehr die

werden wir unter den elliptischen Gebilden insbesondere solche betrachten, welche zu ganzzahligen quadratischen Formen gehören, in dem Sinne, dass die Norm der allgemeinsten Periode des Gebildes

$$(\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$$

gleich einer Form

$$a x^2 + b x y + c y^2$$

mit ganzzahligen Coefficienten wird. Diese Gebilde nennt man nach dem Vorgange von Kronecker <u>singuläre elliptische Gebilde</u>. Es wird sich für uns darum handeln, die besonderen Eigenschaften kennen zu lernen, welche die singulären elliptischen Gebilde gegenüber der Periodentransformation n^{ter} Ordnung.

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= A\omega_1 + B\omega_2 \\ \Omega_2 &= C\omega_1 + D\omega_2 \end{aligned}\right\} AD - BC = n$$

aufweisen. Man bezeichnet diesen Gegenstand gewöhnlich kurzweg als die <u>complexe Multiplication</u>

der elliptischen Functionen. Die Bezeichnung rührt daher, dass unter den genannten Transformationen solche vorhanden sind, welche in einer Multiplication der Perioden mit einer complexen Zahl bestehen und dass diese besondere Transformation durch die Abhandlungen von Abel zuerst bekannt geworden ist.

Die Lehre von der complexen Multiplication bildet nach der allgemeinen Ansicht der Mathematiker einen der schönsten und zugleich einen der schwierigsten Theile unserer Wissenschaft. So konnte Camille Jordan in der Einleitung zu seinem Traité des Substitutions die von Kronecker aufgestellten Theoreme „l'envie et le désespoir des géomètres" nennen. Ich hoffe, Ihnen zeigen zu können, dass infolge der in der Neuzeit erreichten Fortschritte keine eigentliche Schwierigkeit mehr mit dem Gegenstande verbunden ist, man vielmehr die

Hauptheoreme durchaus auf einfachem Wege einsehen kann.

Fr. 24. 4. 96. Bereits im vorigen Semester haben wir von der <u>Stufeneintheilung</u> der elliptischen Modulfunctionen gesprochen. Wir bezeichneten als Functionen der ersten Stufe solche Moduln, welche, wie die Function $J(\omega)$, bei der Gesammtgruppe der linearen Periodentransformationen in sich übergehen. Neben der Gesammtgruppe werden insbesondere diejenigen Untergruppen in Betracht gezogen und als Hauptcongruenzgruppen n^{ter} Stufe bezeichnet, deren Substitutionen modulo einer gegebenen Zahl n der Identität congruent sind.

Für die Hauptcongruenzgruppe der 2ten Stufe haben wir den Discontinuitätsbereich schon früher bestimmt. Er bestand aus dem Sechsfachen des Discontinuitätsbereiches

der Gesammtgruppe, entsprechend dem Umstande, dass der Index dieser Untergruppe gleich 6 ist. In dem Doppelverhältnisse λ der Verzweigungspunkte des gewöhnlichen elliptischen Integrals erkannten wir einen Hauptmodul zweiter Stufe, d. h. eine Modulfunction, welche in dem genannten Bereiche jeden Werth einmal und nur einmal annimmt. Eine unmittelbare Folge dieser Eigenschaft ist, daß die Gleichung

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} (\text{mod } 2)$$

die andere Gleichung

$$\lambda(\omega') = \lambda(\omega)$$

nach sich zieht, und daß umgekehrt diese Gleichung das Bestehen jener bedingt. Jede andere Function desselben Fundamentalbereiches wird eine rationale Function von λ, insbesondere ist J eine rationale Function 6ten Gra-

des: $\mathcal{J}(\omega) = \mathcal{R}_6(\lambda)$. Die Existenz eines Hauptmoduls zeigt an, daß der Fundamentalbereich zweiter Stufe vom Geschlechte 0 ist, d. h. daß er bei der durch die Kantenzuordnung angezeigten Zusammenbiegung in eine geschlossene Fläche vom Geschlechte 0 übergeht. Es hat dies insbesondere zur Folge, daß die 6 Werthe von λ, welche zu dem nämlichen Werthe von $\mathcal{J}$ gehören, linear untereinander zusammenhängen. Wegen des Beweises aller dieser Behauptungen vergl. Modulf. I pg. 270 u. ff., sowie die Figur von pg. 72.

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei den Hauptcongruenzgruppen 3ten, 4ten und 5ten Stufe. Auch hier ist das Geschlecht des Discontinuitätsbereiches gleich 0, dagegen wird es für die höheren Stufen grösser als 0. Dementsprechend giebt es einen Hauptmodul 3ten, 4ten und 5ten Stufe, derselbe wird mit $\xi(\omega)$, $\mu(\omega)$, $\mathfrak{z}(\omega)$ bezeichnet und bez. Tetraëder-,

Oktaëder-, Ikosaëder-Irrationalität genannt. Die Benennung gründet sich darauf, dass die betr. Discontinuitäts=bereiche auf dieselbe Weise in Disconti=nuitätsbereiche der Gesammtgruppe zerfallen, wie die Kugel beiden Ge=bietseintheilungen der regulären Körper. In demselben Sinne gehört der Modul λ zum „Diëder" $n = 3$. Man vergleiche hierzu „Modulf." I pg. 354, 355, 356, wo die Figuren in der ω-Ebene, und pg. 104, 76, 106, wo die entsprechenden Figuren auf der Kugel dargestellt sind. Die Zerlegung der Discontinuitäts=bereiche in Unterbereiche geht Hand in Hand mit der algebraischen Ab=hängigkeit der Moduln höherer Stu=fe von dem Modul J. Wir wollen die Beziehung für die 5te Stufe expli=cite angeben. Der zugehörige Disc. besteht aus 60 Disc. der Gesammt=gruppe; daher wird J eine rationa=le Function 60ten Grades von ζ. Wir schreiben dieselbe in der Ge=

Gestalt einer fortlaufenden Proportion folgendermassen an:

$$J:(J-1):1=\left[-\zeta^{20}-1+228(\zeta^{15}-\zeta^{5})-494\zeta^{10}\right]^{3}$$
$$:-\left[\zeta^{30}+1+522(\zeta^{25}-\zeta^{5})-1005(\zeta^{20}+\zeta^{10}\right.$$
$$:1728\zeta^{5}(\zeta^{10}+11\zeta^{5}-1)^{5}.$$

Vergl. hierzu „Modulf" I pg. 105 und II pg. 383.

Die vorstehende Gleichung heisst die <u>Ikosaëdergleichung</u>; sie definirt ζ als algebraische Function von J.

Wir werden von der Ikosaëderirrationalität im Folgenden einen consequenten Gebrauch machen. Es zeigt sich ohnehin, dass man in der Transformationstheorie bei den Moduln der 1ten Stufe nicht stehen bleiben kann. In der vorhandenen Litteratur kommt bereits häufig das Doppelverhältnis λ, dann $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt[4]{\lambda(\lambda-1)}$ etc. vor. Demgegenüber werden wir durchgehends die Ikosaëderirrationalität bevorzugen.

Wir haben in der Einleitung betont, dass der zahlentheoretische Aequiva-

lenzbegriff der Invarianteneigenschaft der elliptischen Functionen genau entspricht. Dies trifft jedoch zunächst nur hinsichtlich der Modulfunctionen 1ter Stufe zu. Um auch die Modulfunctionen höherer Stufen für die Zahlentheorie fruchtbar zu machen, müssen wir den Aequivalenzbegriff verfeinern. Neben der Aequivalenz schlechtweg werden wir die relative Aequivalenz modulo n stellen, indem wir die zu betrachtenden Substitutionen, welche die eine Form in die andere überführen sollen, auf die Hauptcongruenzgruppe n ter Stufe beschränken. Es entsteht insbesondere die Frage: Wann sind zwei quadratische Formen negativer Discriminante in diesem Sinne relativ aequivalent?

Die Beantwortung dieser Frage ist in unsern Modulfiguren der ω-Ebene vollständig enthalten. In der That geben dieselben in allen Fällen ein geeignetes „Reductionsverfahren" zur Entscheidung der Aequi-

valenz. Die einzelne Form wird in der w-Ebene durch dasjenige Paar conjugirter Punkte dargestellt, für welches $aw^2 + bw + c$ verschwindet. Handelt es sich um die gewöhnliche Aequivalenz, so giebt es eine und nur eine Substitution der Gesammtgruppe, welche einen Punkt des Paares in den Ausgangsraum der Dreieckstheilung überführt. Zwei Formen waren nun aequivalent, wenn sie bei der hierdurch definirten Reduction denselben Punkt des reducirten Raumes ergaben. In ganz entsprechender Weise werden wir verfahren, wenn nach der relativen Aequivalenz zweier Formen gefragt ist. Wir dürfen dann bei der Reduction nur die Substitutionen der betr. Untergruppe benutzen. Durch diese gelingt es jedesmal in eindeutiger Weise, die repräsentirenden Punkte der gegebenen Formen in den zu der betr. Hauptcongruenzgruppe gehörigen reducirten Discontinui-

tätsbereich zu bringen. Fallen dabei die repräsentirenden Punkte zusammen, so sind die Formen relativ aequivalent, im anderen Falle sind sie es nicht. Um die Reduction wirklich auszuführen, haben wir die erzeugenden Operationen der Untergruppe nach einem bestimmten Gesetze zu combiniren. Diese erzeugenden Substitutionen sind keine anderen, als diejenigen, welche die Kanten des reducirten Discontinuitätsbereiches zusammenordnen.

30.4.96. Wir erwähnten neben den Modulfunctionen der niedersten Stufe in der letzten Stunde des vorigen Semesters bereits einige Modulfunctionen höherer Stufen, welche zu denen der untersten Stufen in einem einfachen algebraischen Verhältniß stehen. Besonders wichtig ist in dieser Hinsicht die in ω_1, ω_2 eindeutige Function:

$$\sqrt[12]{\Delta},$$

welche wir, da Δ von der ersten Stufe ist, als <u>der ersten Stufe</u> adjun-

girt bezeichneten. In demselben Sinne sind der zweiten Stufe adjungirt beispielsweise:

$$\sqrt[8]{\lambda}\ , \ \sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}\ .$$

Eine directe Untersuchung von $\sqrt[12]{\Delta}$ findet man bei Hurwitz: Math. Ann. Bd. 18. Vergl. auch Modulf. I pg. 623.

Wichtig ist für uns u. a., dass $\sqrt[12]{\Delta}$ in der sog. „Kronecker'schen Grenzformel" auftritt. Ich kann auch über diesen interessanten Gegenstand hier nur ganz kurz referiren.

Kronecker knüpft an die Untersuchungen von Dirichlet zur Bestimmung der Klassenanzahl an, welche in der Zahlentheorie von Dirichlet-Dedekind, Cap. V, dargestellt sind. Das Characteristische der Dirichlet'schen Untersuchungen ist das Hereinspielen der unendlichen Reihen in die Zahlentheorie. Dirichlet betrachtet bei gegebener quadratischer Form $ax^2 + bxy + cy^2$ die Reihe

$$\sum \frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^{1+\varrho}},$$

in welcher sich die Summation über alle ganzen Zahlen x und y erstreckt, mit Ausnahme des Wertepaares $x=0, y=0$. Die Zahl ϱ muss grösser als Null genommen werden, damit die Reihe convergiert. In unserer Ausdrucksweise bedeutet die Reihe nichts Anderes als

$$\sum \frac{1}{(r^2)^{1+\varrho}},$$

wo r die Entfernung der Gitterpunkte von O ist und wo über alle Gitterpunkte summirt wird. Dirichlet geht dann zum Limes $\varrho=0$ über und zeigt, dass

$$\lim_{\varrho=0} \varrho \sum \frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^{1+\varrho}} = \frac{2\pi}{\sqrt{D}}.$$

Als Function von ϱ aufgefasst, besitzt also die Dirichlet'sche Reihe für $\varrho=0$ einen einfachen Pol.

Die Leistung von Kronecker besteht nun darin, dass er in der Entwicke-

lung der Reihe nach Potenzen von ρ das nächst folgende Glied bestimmte. Es ergiebt sich

$$\frac{\sqrt{\mathfrak{D}}}{2\pi}\sum\frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^{1+\rho}}=\frac{1}{\rho}+\left(C-\lg\left\{(\omega_1\bar{\omega}_2-\omega_2\bar{\omega}_1)\sqrt[12]{\Delta\bar{\Delta}}\right\}\right)+\cdots\cdots$$

wo C eine numerische Constante ist.*) Dieses ist die Kronecker'sche Grenzformel.

Wir fassen dieselbe hier auf als eine Methode zur Berechnung von $\sqrt[12]{\Delta}$ und schreiben dementsprechend:

$$\log\left\{(\omega_1\bar{\omega}_2-\omega_2\bar{\omega}_1)\sqrt[12]{\Delta\cdot\bar{\Delta}}\right\}=$$
$$=C+\frac{1}{\rho}-\frac{\sqrt{\mathfrak{D}}}{2\pi}\left(\sum\frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^{1+\rho}}\right)_{\lim\rho=0}$$

Merkwürdiger Weise erscheint hier nicht die Function $\sqrt[12]{\Delta}$, sondern ihre Norm in eine Reihe entwickelt, im Gegensatz zu allen sonst bekannten Reihen der Functionstheorie. Ebenso können wir die rechte Seite als ein Aggregat von Normen auffassen, da nämlich

*) Hier ist natürlich $(\omega_1\bar{\omega}_2-\omega_2\bar{\omega}_1)=\sqrt{\mathfrak{D}}$.

$$ax^2 + bxy + cy^2 = |\omega_1 x + \omega_2 y|.$$

Wir kommen also in diesen modernsten Gebieten der Functionentheorie auf die Entwickelung einer Norm, welche nach Functionen von Normen fortschreitet, auf eine reelle Reihe von Functionen reeller Variabler!

Die Kronecker'schen Arbeiten befinden sich an verschiedenen Stellen vergl. insbesondere den Beweis der fortlaufenden Artikelreihe über elliptische Functionen, in den Sitzungsberichten d. Berliner Academie, 1883 № 1-5 und 1885 № 6-10. Weber behandelt die Kronecker'sche Grenzformel in §. 113 seiner elliptischen Functionen.

Erster Haupttheil.

Nach dieser einleitenden Übersicht handeln wir nun ausführlich von der

Transformation hoeherer Ordnung.

der Gitter und der mit ihr parallel laufenden Transformation höherer Ordnung der elliptischen Functionen.

Vorab bemerken wir, dass der Standpunct, auf dem wir uns mit den Gittern befassen, der umfassendere ist und eine allgemeine Bedeutung für die Zahlentheorie besitzt, und dass die Beziehung zu den elliptischen Functionen erst dann zu Stande kommt, wenn wir dem Gitter speziell eine definite Form (eine elliptische Maassbestimmung) zuordnen. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die späteren Auseinandersetzungen

dieser Vorlesung.

Unter einer Transformation n^{ter} Ordnung verstehen wir Folgendes: Wir setzen

$$1)\left\{\begin{array}{l}\Omega_1 = a\omega_1 + b\omega_2\\ \Omega_2 = c\omega_1 + d\omega_2\end{array}\right\} ad - bc = n > 1.$$

Hier bedeuten ω_1, ω_2 die Gitterzahlen (im Besonderen die gewöhnlichen complexen Zahlen), welche zu den dem Anfangspunkte anliegenden Eckpunkten irgend eines Parallelogramms gehören, welches wir dem ursprünglichen Gitter als Elementarparallelogramm einzeichnen können. Gleichzeitig werden Ω_1, Ω_2 die Gitterzahlen welche in demselben Sinne zu den Eckpunkten eines neuen Gitters gehören. Von demselben sagen wir, dass es dem ursprünglichen Gitter eingelagert ist. Die vorstehenden Formeln zeigen, dass nicht alle Ecken des alten Gitters in dem neuen Gitter vorkommen. Das eingelagerte Gitter besitzt

also, wie schon durch seine Benennung angezeigt wird, grösere Maschen als das ursprüngliche. Man berechnet leicht, daß das neue Elementarparallelogramm n-mal so groß ist, wie das ursprüngliche.

Statt von den Gittern können wir natürlich auch von den quadratischen Formen sprechen. So geschieht es bei Gauss. Gauss betrachtet neben der Form

$$f = a'x^2 + b'xy + cy^2 = (\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$$

die andere

$$F = AX^2 + BXY + CY^2 = (\Omega_1 X + \Omega_2 Y)(\bar{\Omega}_1 X + \bar{\Omega}_2 Y),$$

in welcher die Ω mit den ω durch die Substitution 1) zusammenhängen. In Folge dessen haben wir:

$$F = (\omega_1 (aX + cY) + \omega_2 (bX + dY))(\bar{\omega}_1 (aX + cY) + \bar{\omega}_2 (bX + dY)).$$

Dies ist aber nichts Anderes, als der vorstehende Ausdruck für f, falls wir eintragen:

$$2)\quad \begin{cases} x = aX + cY \\ y = bX + dY \end{cases}$$

Hiernach können wir sagen: Es entsteht F aus f, wenn wir die Grössen x und y durch die Transformation 2) von der Determinante n substituiren und nach Potenzen der Grössen X und Y ordnen.

Eine in solcher Weise abgeleitete Form F nennt Gauss „in f enthalten". Diese Bezeichnung entspricht unserer Ausdrucksweise von dem „eingelagerten Gitter". Hinsichtlich der Discriminante ergiebt sich

$$D_F = n^2 D_f.$$

Diese Gleichung kommt auf unsere obige Angabe über den Flächeninhalt der Elementarparallelogramme hinaus.

Wir werden unsererseits aber hier wie auch sonst lieber bei den Gittern bleiben. Der Übergang

zu den Formen würde bedeuten, dass wir die einzelne Gitterzahl jedesmal mit einem Factor, der conjugirten Gitterzahl, multiplicieren. Dadurch würden wir die Betrachtung unnöthig beschwerlich machen.

Wir geben zunächst eine Eintheilung unserer Transformationen nach der Grösse des gemeinsamen Theilers, welcher in den Coefficienten der Gleichung 1) enthalten ist.

Ein besonders einfacher Fall ist der, wo nach Absonderung des gemeinsamen Theilers die Determinante der Coefficienten gleich 1 wird. In diesem Falle können wir (ev. durch Übergang zu einem aequivalenten Periodenpaar ω_1, ω_2) der Transformation die Form geben:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= m\,\omega_1 \\ \Omega_2 &= m\,\omega_2 \end{aligned}\right| \; n = m^2.$$

Wir haben dann die gewöhnliche Multiplication vor uns.

Das entgegengesetzte Extrem findet

statt, wenn die Coefficienten a, b, c, d überhaupt keinen gemeinsamen Theiler haben. Wir sprechen dann von einer <u>eigentlichen Transformation</u> n^{ter} Ordnung. Zwischen diesen äussersten Fällen giebt es Zwischenstufen, welche man als <u>gemischte Transformationen</u> bezeichnen kann. Hierunter verstehen wir unter τ einen quadratischen Theiler von n verstanden, Transformationen von der Form:

$$\left.\begin{aligned}\Omega_1 = \tau(a'\omega_1 + b'\omega_2)\\ \Omega_2 = \tau(c'\omega_1 + d'\omega_2)\end{aligned}\right| n = \tau^2(a'd' - b'c'),$$

wo nun a', b', c', d' theilerfremd sein sollen.

Sodann beschäftigen wir uns mit der Frage:

<u>Wie viel verschiedene Gitter giebt es, welche durch Transformation n^{ter} Ordnung einem gegebenen Gitter eingelagert werden können?</u>

Die Antwort lautet verschieden, je nachdem wir nach Parallelgittern oder nach Punktgittern fragen.

Parallelgitter giebt es natürlich in unendlicher Anzahl. Um sie aufzustellen, brauchen wir nur die Diophantische Gleichung

$$ad - bc = n$$

in allgemeinster Weise zu lösen, welche unendlich viele Wurzeln hat.

Um die Anzahl der *Punktgitter* zu finden, gehen wir von irgend einem Parallelgitter, d. h. von irgend einem Lösungssystem a, b, c, d aus. Auf dieses wenden wir eine Transformation erster Ordnung an, wodurch das Punktgitter nicht verändert wird. – Wir setzen also:

$$\Lambda'_1 = \alpha \Lambda_1 + \beta \Lambda_2 = (\alpha a + \beta c)\omega_1 + (\alpha b + \beta d)\omega_2$$

$$\Lambda'_2 = \gamma \Lambda_1 + \delta \Lambda_2 = (\gamma a + \delta c)\omega_1 + (\gamma b + \delta d)\omega_2$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Wir wollen nun diese $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dazu benutzen, um die Coefficienten des letzten Gliedes möglichst zu vereinfa-

chen, oder anders ausgedrückt, wir wollen unter der Schaar der aequivalenten Gitter ein bestimmtes aussuchen von besonders einfacher Gestalt. Dieses nennen wir den Repräsentanten der Klasse. Wir haben dann, um die Anzahl der verschiedenen Punktgitter zu finden, nur nöthig, die Repräsentanten abzuzählen. Ueber die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verfügen wir folgendermassen. Wir bestimmen γ und δ aus der Gleichung

$$\gamma a + d c = 0$$

als theilerfremde Zahlen. Es ist dann immer möglich, Zahlen α und β zu finden, so dass

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

wird. Unsere Transformation lautet jetzt:

$$\begin{array}{l} \Omega_1' = \mathfrak{A}\omega_1 + \mathfrak{B}\omega_2 \\ \Omega_2' = \qquad\quad \mathfrak{D}\omega_2 \end{array} \Bigg| \; \mathfrak{A}\mathfrak{D} = n.$$

Dasselbe Verfahren wenden wir von Neuem an, indem wir Ω_1', Ω_2' linear

substituiren. Dadurch können wir zunächst erreichen, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ positiv werden. Da nämlich $n > 0$, so haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ dasselbe Vorzeichen. Ist dieses negativ, so gehen wir zu $-\Lambda_1', -\Lambda_2'$ über, was einer Transformation erster Ordnung entspricht. Dabei wird das Vorzeichen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ umgekehrt. Ferner können wir erreichen, dass

$$0 \leqq \mathfrak{B} < \mathfrak{D}$$

wird. Durch die Transformation

$$\Lambda_1'' = \Lambda_1 + \beta \Lambda_2$$

$$\Lambda_2'' = \Lambda_2 ,$$

welche gleichfalls die Determinante 1 hat, verwandelt sich nämlich $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B} + \beta\mathfrak{D}$; durch geeignete Wahl von β können wir also der angegebenen Bedingung genüge leisten.

Hiernach verstehen wir unter dem „Repräsentanten" dasjenige Parallelgitter, welches aus dem ursprüng-

lichen durch die „repräsentirende Transformation

$$\begin{array}{l|l} \Lambda_1 = \mathfrak{A}\omega_1 + \mathfrak{B}\omega_2 & \\ & \mathfrak{A}\mathfrak{D} = n,\ \mathfrak{A} > 0,\ \mathfrak{D} > 0,\ 0 \leqq \mathfrak{B} < \mathfrak{D} \\ \Lambda_2 = \qquad\quad \mathfrak{D}\omega_2 & \end{array}$$

hervorgeht. Die vorstehende Betrachtung zeigte, daß unter der Schaar aequivalenter Gitter *mindestens* ein Repräsentant dieser Art vorhanden ist. Dass es auch *nur einen* solchen geben kann, folgt ebenso leicht. Durch eine Transformation erster Ordnung geht nämlich Λ_1, Λ_2 über in

$$\Lambda_1' = \alpha\mathfrak{A}\omega_1 + (\alpha\mathfrak{B} + \beta\mathfrak{D})\omega_2$$

$$\Lambda_2' = \gamma\mathfrak{A}\omega_1 + (\gamma\mathfrak{B} + \delta\mathfrak{D})\omega_2 .$$

Soll hierdurch wieder ein Repräsentant gegeben sein, so muß $\gamma = 0$ sein; ferner wird, da $\alpha\delta = 1$ und $\alpha\mathfrak{A} > 0$ sein soll, $\alpha = 1$ und $\delta = 1$. Der Coefficient von ω_2 in der zweiten Gleichung wird daher gleich $\mathfrak{D}$; da

ausserdem der Coefficient von ω_2 in der ersten Gleichung kleiner als D' sein soll, so folgt nothwendig $\beta = 0$.

Die vorstehenden Betrachtungen fassen sich in den Satz zusammen:

Man bekommt alle eingelagerten Punktgitter und jedes nur einmal, indem man alle Transformationen

$$\Lambda_1 = A\omega_1 + B'\omega_2$$
$$\Lambda_2 = \qquad\quad D'\omega_2$$

aufschreibt, in denen A und D' positive Zahlen sind, welche im Producte n geben, und wo B' die Zahlen $0, 1, \ldots D'-1$ durchläuft.

1.5.96.) Wir kommen nun zur Abzählung der Repräsentanten. Zunächst sei n eine Primzahl: $n = p$. Dann ist entweder $A = 1$, $D' = p$ oder $A = p$, $D' = 1$. Dementsprechend giebt es die folgenden Transformationen:

$$\left.\begin{array}{l}\Lambda_1 = \omega_1 + B'\omega_2 \\ \Lambda_2 = \qquad p\omega_2\end{array}\right\} B' = 0, 1, \ldots p-1 \quad \Big|\ p \text{ Transf.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Lambda_1 = p\omega_1 + B'\omega_2 \\ \Lambda_2 = \qquad\quad \omega_2\end{array}\right\} B' = 0 \quad \Big|\ 1 \text{ ,,}$$

im Ganzen $p+1$ Transformationen.

Wir nehmen ferner an: $n = p^2$. Wir können dann n auf dreierlei Arten zerlegen und haben:

$A=1,\ D=p^2,\ B=0,1,..\,p^2-1$	p^2 Transf.
$A=p,\ D=p,\ B=0,1,..\,p-1$	p ——
$A=p^2,\ D=1,\ B=0$	1 ——

im Ganzen p^2+p+1 Transformationen. Unter diesen befindet sich eine uneigentliche Transformation, welche in der zweiten Reihe vorkommt, nämlich $\Omega_1 = p\omega_1$, $\Omega_2 = p\omega_2$.

Hiernach ist das allgemeine Gesetz klar: Bedeutet n eine beliebige Zahl und $\Phi(n)$ die Theilersumme von n, so ist die Gesammtzahl aller Transformationen von der Ordnung n gleich $\Phi(n)$.

In der That kann D alle Theiler von n durchlaufen; zu jedem Werthe von D aber giebt es D Werte von B. Daher haben wir soviel Transformationen n^{ter} Ordnung, als die Summe der Theiler Einheiten enthält.

Unter diesen befinden sich jedoch auch uneigentliche Transformationen. Die Anzahl der eigentlichen wird, wie wir hier kurz angeben wollen:

$$\psi(n) = n\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right) \cdots$$

Dabei wird noch ersichtlich

$$\Phi(n) = \sum \psi\left(\frac{n}{\tau^2}\right).$$

Wenn wir nämlich n der Reihe nach von seinen quadratischen Theilern (τ) befreiën und alle eigentlichen Transformationen von der Ordnung $\frac{n}{\tau^2}$ bilden, so erhalten wir in der Summe alle Transformationen von der Ordnung n.

Nach den vorstehenden Formeln können wir die folgende kleine Tabelle aufstellen:

$n =$	2	3	4	5	6	8	12
$\psi =$	3	4	6	6	12	12	24
$\Phi =$	3	4	7	6	12	15	28

Vom arithmetischen Standpunkte sind die bisher besprochenen Repräsentanten die einfachsten; wir bezeichnen

sie als <u>arithmetische Repräsentanten.</u>
Für die Zwecke der Functionentheorie nehmen wir aber besser eine kleine Änderung vor:

Es sei $n = p$. In diesem Falle lassen wir die ersten p der pg. 21 hingeschriebenen Repräsentanten ungeändert. Bei dem letzten derselben aber vertauschen wir Ω_1 mit Ω_2 und Ω_2 mit Ω_1, was auf eine Transformation 1ter Ordnung hinauskommt, so daß $\Omega_1 = -\omega_2$, $\Omega_2 = p\omega_1$ wird. Unsere $p+1$ Transformationen sind dadurch auf die gemeinsame Form gebracht:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) \\ \Omega_2 &= p(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2) \end{aligned}\right| \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Entsprechendes lässt sich allgemein erreichen. Sei n eine beliebige Zahl und $n = \tau^2 n'$! Alsdann kann man die Repräsentanten so umschreiben, daß

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= \tau(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) \\ \Omega_2 &= \tau n'(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2) \end{aligned}\right| \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Die in solcher Weise ausgewählten Transformationen nennen wir die functionentheoretischen Repräsentanten. Wir werden dieselben bald benutzen.

Die bisherigen Erörterungen bezogen sich auf ganz beliebige Gitter. Wir gehen nun auf „ganzzahlige Gitter" ein, d.h. auf solche, in denen a, b, c und in's Besondere

$$D = b^2 - 4ac.$$

ganze Zahlen sind. Während im allgemeinen Falle jedes Punktgitter für sich dasteht, treten, wie mehrfach betont, die ganzzahligen Gitter von gleicher Discriminante zu einem Organismus zusammen. Wir bezeichnen die Anzahl der Punktgitter gleicher Discriminante mit h oder H, je nachdem wir nur die primitiven, oder überhaupt alle Punktgitter in Rechnung bringen. Dabei besteht ersichtlich die Relation:

$$H(D) = \sum h\left(\frac{D}{\tau^2}\right),$$

unter τ einen quadratischen Teiler von D verstanden.

Wir können aus jedem dieser Gitter durch Transformation n^{ter} Ordnung $\Phi(n)$ neue Gitter erhalten, welche die Discriminante $n^2 D$ besitzen werden. Die Frage liegt nahe, ob durch Transformation n^{ter} Ordnung überhaupt alle Gitter der Discriminante $n^2 D$ aus den Gittern der Discriminante D erhalten werden. Diese Frage wird durch eine Untersuchung von Lipschitz (vergl. Crelle Bd. 53, 1867) bejaht.

Hiernach können wir bei dem Studium der ganzzahligen Gitter folgendermassen verfahren: Wir bemerken zunächst, dass jede Discriminante die Form hat: $4\nu+1$ oder 4ν. Solche Discriminanten, welche nicht durch Transformation höherer Ordnung aus kleineren Discriminanten entstehen können, bezeichnen wir nach Weber als Stammdiscriminanten. Hiernach werden Stammdiscriminanten sein Discr. von der Form $4\nu+1$, falls sie ohne quadratischen Theiler

sind und Discrim. von der Form 4ν, falls ν keinen quadratischen Theiler enthält und falls nach Forthebung der 4 eine Zahl übrig bleibt, welche keine Discriminante sein kann, d.h. eine Zahl von der Form $4\nu'+2$ oder $4\nu'+3$. Wir construiren jetzt zu allen Stammdiscriminanten die zugehörigen Gitter, welche nothwendig sämmtlich primitiv werden, so dass $h = H$ wird. Dies sind unsere „Stammgitter". In die Stammgitter lagern durch Transformation n^{ter} Ordnung neue Gitter ein, wobei wir n alle Zahlen 2, 3, 4 ... durchlaufen lassen. Hierdurch kommen wir zu je $\Phi(n)$ „Zweiggittern". Auf diese Weise ergiebt sich eine systematische Aufzählung der ganzzahligen Gitter nach ihrem inneren Zusammenhange.

Wir betrachten nun die functionentheoretische Seite unseres Pro-

blems. Gegeben sei ein elliptisches Gebilde durch seine Perioden ω_1, ω_2, die Invarianten g_2, g_3 bez. die absolute Invariante J. Wir nehmen eine Transformation n^{ter} Ordnung mit den Perioden vor, durch welche sich g_2, g_3, J in g_2', g_3', J' verwandeln mögen. Es entsteht die Frage, wie diese neuen Grössen mit den alten zusammenhängen.

Zunächst handelt es sich um die Function $J(\omega)$. Da dieselbe nur von dem Periodenquotienten abhängt, so wird dieselbe durch eine blosse Multiplication der Perioden überhaupt nicht geändert. Aus demselben Grunde haben wir überhaupt nur die eigentlichen Transformationen zu berücksichtigen, indem ein etwaiger gemeinsamer Factor τ der Transformationsgleichungen für Ω_1, Ω_2 im Quotienten von selbst herausfällt. Hiernach giebt es zu jedem Werthe von J für jedes n im Ganzen $\psi(n)$ transformirte Werthe.

$$J'_1, \; J'_2, \; \ldots \; J'_{\psi(n)},$$

welche die allgemeine Form haben:

$$J\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{n(\gamma\omega+\delta)}\right),$$

wo unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Werthe dieser Grössen aus den functionenth. Repräsentanten zu verstehen sind.

Die Frage ist, wie diese Werthe J' mit dem gegebenen J zusammenhängen.

In indirecter Weise kann man natürlich den Zusammenhang dahin definiren: Man suche zu dem gegebenen J die zugehörigen Werthe des Argumentes ω, welche sämmtlich aus einem von ihnen ω_0 durch die linearen Substitutionen $\omega = \frac{\alpha\omega_0+\beta}{\gamma\omega_0+\delta}$ hervorgehen. Man bilde nun $\frac{\omega}{n}$ und behalte von den unendlich vielen Werthen von $\frac{\omega}{n}$ nur die nicht aequivalenten bei. Als solche kann man direct die $\psi(n)$ functionentheoretischen Repräsentanten wählen. Endlich bestimme man die Werthe von J, welche diesen $\psi(n)$ Argumenten entsprechen. So erhält

man die gesuchten Werthe J':
$$J' = J\left(\frac{\omega}{n}\right),$$
dies ist natürlich nur eine von $\psi(n)$ verschiedenen Darstellungen.

7.5.96. Wir wünschen aber den Zusammenhang in <u>directerer</u> Form anzugeben, indem wir, ohne auf das Argument ω_0 zu recurriren, die Werthe J' in ihrer Abhängigkeit von dem gegebenen Werthe J darstellen. In dieser Hinsicht werden wir den folgenden Satz beweisen, den wir zunächst nur für den Fall, daß der Transformationsgrad eine Primzahl $(n = p)$ ist, aussprechen:

<u>J' ist eine $(p+1)$-werthige irreducible algebraische Function von J.</u>

Der Beweis stützt sich auf functionentheoretische Betrachtungen in der ω-Ebene. Wir constatiren erstens, daß vermöge der obigen Darstellung <u>$J' = J\left(\frac{\omega}{p}\right)$ eine eindeutige Function von ω ist.</u>*)

*) Nimmt man $J'(J)$ in voller Allgemeinheit, indem man von irgend einem zu J gehörigen ω zu einem beliebigen $\frac{1}{n}\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ übergeht, so erhält man $\psi(n)$ getrennte eindeutige Functionen von ω nebeneinander.

Wir fragen sodann, bei welchen Substitutionen der $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$-Gruppe unser $\mathfrak{F}'$ ungeändert bleibt. Offenbar bei allen solchen Substitutionen und nur bei solchen, welche für das Argument $\frac{\omega}{p}$ eine ganzzahlige Substitution von der Determinante 1 oder wie wir kürzer sagen, eine ganzzahlige „unimodulare" Substitution darstellen. Setzen wir also statt ω ein $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, so müssen in

$$\frac{\alpha\omega+\beta}{p(\gamma\omega+\delta)} = \frac{\alpha\frac{\omega}{p}+\frac{\beta}{p}}{p\gamma\frac{\omega}{p}+\delta}$$

die Coefficienten von $\frac{\omega}{p}$ ganze Zahlen von der Determinante 1 sein. Hierzu ist, wie man sieht, erforderlich und hinreichend, daß

$$\beta \equiv 0 \pmod{p}$$

wird. Die Substitutionen, welche dieser Bedingung genügen, bilden eine Untergruppe der gesammten $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$-Gruppe, welche, da sie durch eine Congruenz definirt ist, als Congruenzgruppe zu bezeichnen sein wird.

Man erinnere sich jetzt, dass $J(\omega)$ nur an solchen Stellen der ω-Ebene denselben Werth annimmt, welche durch eine Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ zusammenhängen. Daraufhin können wir unser Resultat so aussprechen:

<u>Ein und dasselbe Werthepaar (J', J) findet sich in der ω-Ebene an solchen und nur an solchen Stellen wieder, welche relativ zu der Congruenzgruppe $\beta \equiv 0 \pmod{p}$ aequivalent sind.</u>

Wir zeichnen sodann den Discontinuitätsbereich unserer Untergruppe. Unter den durch $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ zusammengeordneten Punkten der ω-Ebene sind nur diejenigen im Sinne unserer Congruenzgruppe nicht-aequivalent, welche zu verschiedenen Werthenpaaren (J', J) Anlass geben. Die verschiedenen Werthe von J', welche aus einem gegebenen Werthe von $J(\omega_0)$ durch Transformation p^{ter} Ordnung entstehen, haben wir oben durch die functionentheoretischen Repräsentan-

ten charakterisirt. Diese Repräsentanten sind

$$\frac{\omega_0}{p},\ \frac{\omega_0+1}{p},\ \frac{\omega_0+2}{p},\ \ldots\ \frac{\omega_0+p-1}{p},\ -\frac{1}{\omega_0 p}.$$

Um eine möglichst symmetrische Gestalt des Discontinuitätsbereiches herauszubekommen, wollen wir dieselben lieber in folgender Weise anordnen:

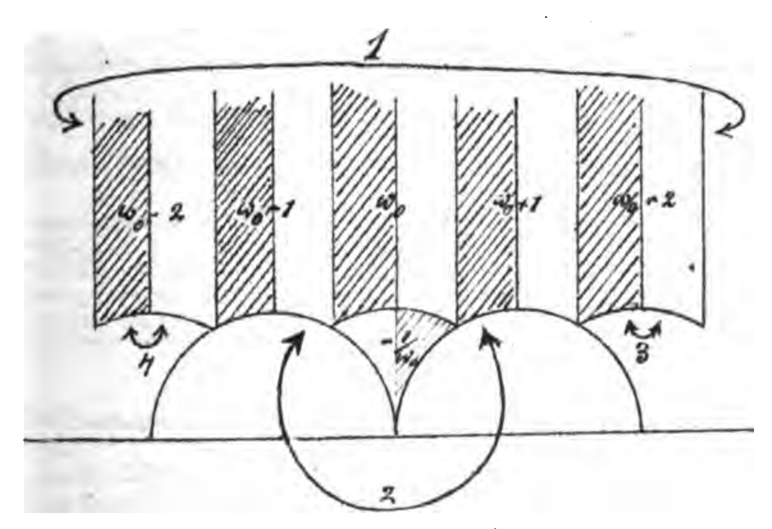
$$\frac{\omega_0-\frac{p-1}{2}}{p},\ \frac{\omega_0-\frac{p-3}{2}}{p},\ \ldots\ \frac{\omega_0-1}{p},\ \frac{\omega_0}{p},\ \frac{\omega_0+1}{p},\ \ldots$$

$$\frac{\omega_0+\frac{p-3}{2}}{p},\ \frac{\omega_0+\frac{p-1}{2}}{p},\ -\frac{1}{p\omega_0},$$

was offenbar gestattet ist, weil diese Werthe den darüberstehenden im Sinne unserer Untergruppe paarweise aequivalent sind.

Wir wollen ferner unter ω_0 speziell einen im reducirten Dreieck der ω-Ebene gelegenen Werth verstehen. Durchläuft ω_0 den ganzen reducirten Raum, so beschreiben gleichzeitig die Grössen $\omega_0+1, \omega_0-1, \ldots -\frac{1}{\omega_0}$ je ein anderes Elementardreieck der Modultheil-

lung. Die untenstehende Figur bezieht sich auf den Fall $p = 5$, den wir für das folgende zu Grunde legen wollen. Neben dem reducirten haben wir hier 5 andere Dreiecke, welche bez. die Werthe repräsentiren: $\omega_0 + 1$, $\omega_0 - 1$, $\omega_0 + 2$, $\omega_0 - 2$, $-\frac{1}{\omega_0}$. Zu irgend zwei Puncten des so entstehenden Polygones gehören verschiedene Werthe von $(J, 'J)$.



Denn einerseits hat J nur in solchen sechs Punkten unseres Polygones denselben Werth, welche vermöge der Gesammtgruppe aequi-

valent sind. In allen diesen Punkten aber besitzt F' verschiedene Werthe, weil dieselben verschiedenen functionentheoretischen Repräsentanten entsprechen. Daher werden alle Punkte des Polygoninneren im Sinne unserer Untergruppe nicht-aequivalent. Umgekehrt giebt es zu jedem Punkte ausserhalb des Polygones im Innern einen Punkt, in dem sowohl F' wie F dieselben Werthe haben, wie in jenem. Daher umfasst das Polygon auch alle Punkte, welche im Sinne unserer Untergruppe nicht-aequivalent sind. Mit einem Worte: Unser Polygon ist der Discontinuitätsbereich der betrachteten Congruenzgruppe.

Dabei ist noch eine Klausel hinsichtlich der Randpuncte hinzuzufügen. Die Kanten des Polygons sind durch die Substitutionen unserer Untergruppe paarweise einander zugeordnet. Streng genommen dürfen wir daher nur die

Hälfte der Begrenzung unserem Polygone hinzurechnen, während wir die andere Hälfte von der Definition des Discontinuitätsbereiches ausschliessen müssen, wie solches durch stärkeres Ausziehen in der Figur angedrückt ist.

Die Substitutionen, welche die Kanten zusammenordnen sind folgende: Dem Pfeile 1 entspricht offenbar die Substitution:

$$\omega' = \omega \pm 5.$$

Der Pfeil 2 bedeutet:

$$-\frac{1}{\omega'} = -\frac{1}{\omega} \pm 1 \text{ oder } \omega' = \frac{\omega}{\mp \omega + 1} .$$

Endlich gehören zu dem Pfeile 3 und 4 die folgenden Substitutionen von der Periode 2:

$$\omega' = \frac{2\omega - 5}{\omega - 2} \quad , \quad \omega' = \frac{-2\omega - 5}{\omega + 2} .$$

Dass die angegebenen Substitutionen sämmtlich zu unserer Untergruppe gehören, ist klar; dass sie die durch die Figur angegebene Kantenzuordnung leisten, rechnet man leicht

nach.

Diese Substitutionen führen das Polygon je in ein anliegendes relativ-aequivalentes über; bei Wiederholung und Combination derselben wird schliesslich die ganze w-Halbebene mit einem System analoger Polygone überdeckt. Die angegebenen Substitutionen bilden daher die Erzeugenden unserer Untergruppe einer allgemeinen Regel entsprechend, nach der die Substitutionen, welche die Kanten des Discontinuitätsbereiches zusammenordnen, allemal die erzeugenden Substitutionen der zugehörigen Gruppe darstellen.

Nachdem wir diese gruppentheoretischen Erläuterungen vorangeschickt haben, kommen wir nun zu dem specifisch functionentheoretischen Schlüssen, durch welche wir die Abhängigkeit der Werthe J' und J bestimmen wollen. Sicherlich ist J' im Falle $p=5$ eine sechswerthige Function von J. Um dieses Ab-

hängigkeitsverhältniß bequem übersehen zu können, werden wir uns die J-Ebene mit einer *sechsblätterigen Riemann'schen Fläche* überdeckt denken.

Jedem Punkte dieser Fläche entspricht ein Werth des Functionenpaares (J', J) und umgekehrt. Andrerseits sahen wir, daß auch jeder Punkt unseres Polygones ein Werthepaar (J', J) repräsentirt und umgekehrt jedes Werthepaar (J', J) einen Punkt des Polygons bezeichnet. Dabei sind sowohl auf der Riemann'schen Fläche wie in unserm Polygone die Werthepaare (J', J) nach dem Gesetz der Stetigkeit ausgebreitet. *In Folge dessen sind die Punkte der Riemann'schen Fläche und die Punkte des Polygones eindeutig und stetig aufeinander bezogen.* Polygon und Fläche sind, wie man sagt, aufeinander eindeutig *abgebildet*. Unser Polygon liefert uns einen *Fundamen-*

talbereich für die Functionen (J', J), d. h. einen genauen Ersatz der Riemann'schen Fläche. Die sechs Blätter, welche bei der Riemann'schen Fläche übereinander liegen, sind in unserem Polygone in übersichtlicher Weise neben einander ausgebreitet; sie entsprechen nämlich einzeln den sechs Elementardreiecken, aus denen sich unser Polygon zusammensetzt. Dabei stellt unser Polygon die geschlossene oder die in zweckmäßiger Weise zerschnittene Riemann'sche Fläche dar, je nachdem wir uns seine Kanten paarweise zusammengeheftet denken oder nicht.

8. V. 96. Wir kommen nun zum Beweise der pag 37 aufgestellten Behauptungen, daß nämlich J' eine irreducible algebraische Function von J ist. Der Zusammenhang zwischen J' u. J wird ein irreducibler, wenn die Riemann'sche Fläche aus einem Stücke be-

steht; er wird ein algebraischer, wenn $\mathfrak{F}'$ auf der Riemann'schen Fläche keine wesentliche Singularität besitzt.

Was nun die <u>Behauptung der Irreducibilität</u> betrifft, so sieht man der Riemann'schen Fläche in der Gestalt unseres Polygones sofort an, daß sie in der That aus einem Stükke besteht. Die Sache würde nur dann anders liegen, wenn unsere Figur aus zwei verschiedenen Theilen bestände, deren Kanten einzeln unter sich zusammengeordnet wären.

Um zweitens zu zeigen, daß <u>auf der Riemann'schen Fläche keine wesentlichen Singularitäten vorkommen</u>, werden wir nach den allgemeinen Regeln der Functionentheorie verfahren, indem wir zeigen, daß für jeden Werth von $\mathfrak{Z}\,\mathfrak{F}'$ in eine Potenzreihe entwikkelt werden kann, welche, wenn überhaupt, nur eine endliche Anzahl von negativen Potenzen

von J enthält. Übrigens wollen wir im Folgenden nicht von der Function J, sondern von $j = 1728\, J$ sprechen, weil dieselbe in arithmetischer Hinsicht vor J ausgezeichnet ist.

Unser Polygon erstreckt sich nur mit den beiden Zipfeln $\omega = 0$ und $\omega = \infty$, bis an die reelle Axe der ω-Ebene heran. Sei ω_0 zunächst ein Punkt unseres Polygons, welcher von diesen beiden Stellen verschieden ist. Die Function j ist in der Umgebung von ω_0 eine analytische Function von ω und kann daher in eine Reihe nach ganzen Potenzen von $\omega - \omega_0$ entwickelt werden. Umgekehrt lässt sich daher $\omega - \omega_0$ durch eine Potenzreihe in $j - j_0$ darstellen $(j_0 = j(\omega_0))$, in welcher keine negativen Potenzen von $j - j_0$ auftreten. Wir schreiben:

$$\omega - \omega_0 = \mathfrak{P}(j - j_0)$$

In entsprechender Weise können wir aber auch die Function $j = j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ an der Stelle ω_0 entwickeln. Da

nämlich der Werth $\frac{w_0}{p}$ dem Innern der positiven w-Halbebene angehört, wenn dieses für den Werth w_0 der Fall ist, so werden wir haben ($J'_0 = J(\frac{w_0}{p})$):

$$J' - J'_0 = \mathfrak{P}\left(w - \frac{w_0}{p}\right).$$

Hier brauchen wir nur den Ausdruck für w aus der vorletzten Gleichung in die letzte einzutragen, um eine Potenzreihe von der Form

$$J' - J'_0 = \mathfrak{P}(J - J_0)$$

zu erhalten. in dieser kommen negative Potenzen von $J - J_0$ überhaupt nicht vor. Hierdurch sind diejenigen Punkte unseres Polygons, welche im Innern der w-Halbebene liegen, erledigt.

Wir kommen nun zu den Stellen $w = 0$ und $w = \infty$. Hier giebt es natürlich für die Function J keine Potenzentwickelungen in w. Wohl aber haben wir bereits im vorigen Semester Entwickelungen

kennen gelernt, welche nach der Grösse

$$r = e^{2i\pi\omega}$$

fortschreiten und welche im Punkte $\omega = \infty$ bei Annäherung in der Richtung der imaginären Axe convergiren. Dieselben lauteten:

$$12\, g_2 \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^4 = 1 + 240 \sum_1^\infty \frac{m^3 r^m}{1 - r^m}$$

$$\Delta \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{12} = r \prod_1^\infty (1 - r^m)^{24}$$

Hieraus ergiebt sich

$$J(\omega) = \frac{1728\, g_2^3}{\Delta} = \frac{1}{r} + \mathfrak{P}(r),$$

oder, wenn wir die nummerischen Werthe der ersten Coefficienten hersetzen wollen:

1) $J(\omega) = \frac{1}{r} + 744 + 196884\, r + \dots$

Die entsprechende Reihe für J' erhalten wir, wenn wir bei unserem Beispiele $p = 5$ bleiben, da-

durch, dafs wir ω mit $\frac{\omega}{5}$, also r mit $r^{1/5}$ vertauschen. Daher wird

$$1')\quad j'(\omega) = \frac{1}{r^{1/5}} + 744 + 196884\, r^{1/5} + \dots$$

Jenachdem wir $\frac{\omega}{5} = \frac{\omega_0}{5}, \frac{\omega_0 \pm 1}{5}, \frac{\omega_0 \pm 2}{5}$ nehmen, werden hier die fünf verschiedenen Werthe von $r^{1/5}$ in Geltung kommen.

Aus dem Punkte $\omega = \infty$ geht der Punkt $\omega = 0$ hervor, wenn wir $-\frac{1}{\omega}$ an die Stelle von ω treten lassen; dabei geht r über in

$$r' = e^{-\frac{2\pi i}{\omega}},$$

während j bei dieser Substitution nicht geändert wird. Die zusammengehörigen Reihenentwickelungen im Punkte $\omega = 0$ lauten daher:

$$2)\quad j(\omega) = \frac{1}{r'} + 744 + 196884\, r' + \dots$$

$$2')\quad j'(\omega) = \frac{1}{r'^{5}} + 744 + 196884\, r'^{5} + \dots$$

Nun können wir aus den Reihen 1) bez. 2) r bez. r' durch eine Reihe darstellen, die nach Potenzen von $\frac{1}{j}$ fortschreitet und positive Exponenten aufweist.

Tragen wir diese Reihen in 1') bez. 2') ein, so erhalten wir eine Darstellung von $\mathfrak{z}'$, aus welcher hervorgeht, daß $\mathfrak{z}'$ auch in den Punkten der Riemann'schen Fläche, welche den Werthen $w = \infty$ und $w = 0$ entsprechen, keine wesentliche Singularität besitzt. In Folge dessen hat $\mathfrak{z}'$ auf der Riemann'schen Fläche überhaupt keinen wesentlich singulären Punkt und stellt in der That eine algebraische Function von $\mathfrak{z}$ dar.

Das somit abgeleitete Resultat können wir auch folgendermassen formuliren: Wir bilden die sog. „Transformationsgleichung"

$$F(\mathfrak{z}';\mathfrak{z}) = (\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}_1')(\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}_2') \cdot \ldots (\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}'_{p+1}) = 0,$$

von welcher die Bestimmung der zu einem gegebenen $\mathfrak{z}$ gehörigen transformirten Werthe $\mathfrak{z}'$ abhängt. In ausgerechneter Form lautet sie:

$$\mathfrak{z}'^{p+1} + a_1 \mathfrak{z}'^{p} + \ldots a_{p+1} = 0.$$

Hier sind nun die Coefficienten

a als symmetrische Function von $J', \ldots J'_{p+1}$ in J eindeutig; da sie überdies in J algebraisch sind, so werden sie eindeutige algebraische, d. h. rationale Functionen von J. Wir erkennen also, dass für J' eine in J rationale irreducible algebraische Gleichung $p+1^{\text{ten}}$ Grades besteht.

Übrigens liefert unsere Schlussweise, welche von den Figuren in der ω-Ebene ausging, mehr als die blosse Existenz dieser Transformationsgleichung. Sie giebt gleichzeitig die Verzweigungspunkte der zugehörigen Riemann'schen Fläche an und die Art, wie die Blätter in den Verzweigungspunkten zusammenhängen. Vergl. hierzu Modulf. II pg 36-62; an gegenwärtiger Stelle können wir dies nicht weiter verfolgen.

Wir betonen, dass wir vorstehend zu der Transformationsgleichung nicht sowohl durch Rechnung als vielmehr durch eine Reihe von Ueberlegungen u. zw. auf directestem Wege gelangt sind.

Gewöhnlich verfährt man weniger direct, indem man von der Theilungsgleichung der elliptischen Functionen ausgeht, wobei die Transformationsgleichung als Resolvente der Theilungsgleichung erscheint. Diesen Weg der übrigens nach anderer Seite Vortheile bietet, konnten wir hier schon deshalb nicht einschlagen, weil wir uns ja ausschliesslich auf Modulfunctionen beschränken müssen.

Wir handeln nun specieller von der Gleichung

$$\underline{F(J', J) = 0}$$

und geben in Kürze eine Reihe von Sätzen über die Coefficienten derselben, wobei wir uns an das Buch von Weber: Elliptische Functionen: (vergl. pg. 250 u. ff.) anschliessen werden.

1. <u>Die Coefficienten $a_1, a_2, ..$ unserer Gleichung sind nicht nur rationale sondern auch ganze Functionen von J.</u> Der Grund hier-

von liegt darin, daß J' und daher auch die symmetrischen Functionen der verschiedenen J' nur dann unendlich werden können, wenn J selbst unendlich wird, wie aus den Reihen von pg. 51 hervorgeht.

2. Bei einer Vertauschung von J und J' bleibt die linke Seite unserer Gleichung ungeändert. Wir bemerken nämlich, daß die Transformation p^{ter} Ordnung, sofern wir nur die Periodenquotienten ω, ω' in Betracht ziehen, eine wechselseitige Operation ist. Die Beziehung zwischen ω und ω' können wir unserem $p+1^{ten}$ Repräsentanten entsprechend allemal auch in der Form

$$\omega' = -\frac{1}{\omega p} \quad \text{oder} \quad \omega\omega' = -\frac{1}{p}$$

ausdrücken; dabei müssen wir nur ω nicht auf den reducirten Raum beschränken, sondern eine geeignete Reihe von $p+1$ Dreiecken durchlaufen lassen. Aus der vorstehenden symmetrischen Schreib-

weise folgt, dass wenn J' aus J durch Transformation p^{ter} Ordnung hervorgeht, auch umgekehrt J aus J' auf dieselbe Weise erzeugt werden kann. Hiernach wird die Transformationsgleichung $F(J', J) = 0$ ungeändert bestehen bleiben, wenn wir J und J' vertauschen. Wir haben daher:

$$F(J', J) = C\,F(J, J').$$

Durch Wiederholung der Vertauschung $J \sim J'$ kommen wir zu

$$F(J', J) = C^2 F(J', J), \text{ d.h. } C^2 = 1,\ C = \pm 1.$$

Der Werth $C = -1$ ist auszuschliessen; denn er würde zur Folge haben, dass für $J' = J$ $F(J, J) = -F(J, J) = 0$ sein müsste, dass also $F(J', J)$ den Teiler $J' - J$ besässe, was wegen der Irreducibilität von F unmöglich ist. Mithin bleibt nur $C = +1$ übrig, d. h. die linke Seite unserer Gleichung bleibt bei Vertauschung von J und J' gänzlich unge-

ändert.

Man bemerke übrigens, dass die genannte Eigenschaft durchaus an dem Umstande haftet, dass J eine Modulfunction ist und als solche nur von dem Quotienten $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ abhängt. Üben wir die Transformation p^{ter} Ordnung an den Perioden selbst aus, so haben wir bei Zugrundelegung desselben Repräsentanten, wie oben:

$$\omega'_1 = -\omega_2$$
$$\omega'_2 = p\omega_1 .$$

Diese Operation ist nicht in ω und ω' symmetrisch, sie führt bei Wiederholung daher nicht zur Identität zurück. Vielmehr ergiebt sich, wenn wir noch zweitens hinzunehmen:

$$\omega''_1 = -\omega'_2$$
$$\omega''_2 = p\omega'_1$$

zwischen ω'' und ω eine gewöhnliche Multiplication mit $-p$, nämlich

$$\omega''_1 = -p\omega_1$$
$$\omega''_2 = -p\omega_2 .$$

Hier kommt man also wie schon Jacobi bemerkt hat, durch Wiederholung der Transformation zu einer Multiplication.

3. Die nummerischen Coefficienten von $j'^{\alpha} j^{\beta}$ werden sämmtlich ganze Zahlen. Die Anzahl der möglichen numerischen Coefficienten ist von vornherein begrenzt. Auf Grund des Satzes 2 kann nämlich jeder der Coefficienten a_i höchstens bis zum $p+1$ten Grade in j ansteigen. Man kann daher die Grössen a_i mit unbestimmten Coefficienten ansetzen, z. B.

$$a_1 = \alpha_{10} + \alpha_{11} j + \alpha_{12} j^2 + \ldots \alpha_{1,p+1} j^{p+1},$$

und diese durch Eintragen der Reihenentwickelungen von j' und j'' berechnen. Die Ganzzahligkeit folgt dann aus dem Gesetz der Reihenentwickelungen nach Potenzen von x, die Einzelheiten vergl. bei Weber.

Das einzige ausgerechnete

Beispiel einer Transformationsgleichung verdanken wir <u>Stephen Smith</u>; derselbe berechnete im Falle $p = 3$ die folgende Relation, in welcher zur Abkürzung $j' = 256x$, $j = 256y$ gesetzt ist:

$$x(x+2^7\cdot 3\cdot 5^3)^3 + y(y+2^7\cdot 3\cdot 5^3)^3 - 2^{16}x^3y^3 - 2^{15}\cdot 5^6\cdot 22973\,xy$$

$$+2^4\cdot 3^2\cdot 31\,x^2y^2(x+y) - 2^2\,3^3\,9907\,xy(x^2+y^2)$$

$$+2\cdot 3^4\cdot 13\cdot 193\cdot 6367\,x^2y^2 + 2^8\,3^5\,5^3\,4471\,xy(x+y) = 0.$$

An diesem Beispiel bewähren sich unsere bisherigen allgemeinen Regeln; wir erkennen aber zugleich, dass wir bei grösseren Werthen des Transformationsgrades zu ganz ungeheuerlichen Relationen geführt werden.

15. V. 96. 4. Die Coefficienten haben aber eine <u>weitere arithmetische Eigenschaft</u>, die wir erwähnen müssen. Man kann nämlich der Transformationsgleichung die Form geben:

$$(j'^p - j)(j^p - j') + \sum_0^p{}_h \sum{}_k c_{hk}(j'^h j^k + j'^k j^h) + \sum_0^{p-1} c_{hh} j'^h j^h = 0.$$

Hier werden sämmtliche c_{hk} ganze durch p theilbare Zahlen. Der Beweis wird mit Hülfe der oben genannten Reihenentwickelungen von j' nach der Hülfsgrösse r geführt. Wir verweisen diesbezüglich auf Weber, Ellipt. Fu. pg. 253–254.

Wenn man daher die Transformationsgleichung modulo p betrachtet, so reducirt sich ihre linke Seite einfach auf das Product:

$$(j'^p - j)(j^p - j').$$

5. Ist der Grad der Transformation keine Primzahl, sondern eine beliebige zusammengesetzte Zahl, so tritt, was den Grad der Transformationsgleichung betrifft, die zahlentheoretische Function $\psi(n)$ an die Stelle von $p+1$. Im Übrigen bleiben die sub 2 und 3 genannten Eigenschaften ungeändert bestehen.

Gegenüber dem bisher eingehaltnen Standpunkte, auf welchem wir die *Transformationsgleichung* voranstellten, giebt es einen höheren Standpunkt, von dem aus man die Gesammtheit der in J und J' rationalen Functionen in's Auge fasst. Man bezeichnet diese Gesammtheit als den *Körper* *(J', J)*. Wir werden daher in Zukunft diesen Körper betrachten, aus den Functionen dieses Körpers die einfachsten aussuchen und deren algebraischen Zusammenhang mit J entwickeln. Hinterher werden wir dann die Grösse J' in rationaler Form durch diese einfachsten Functionen darstellen können.

Der moderne Ausdruck „Functionenkörper" ist im Grunde identisch mit dem, was man gewöhnlich eine „*Riemann'sche Fläche*" nennt. In der That ist die Gesammtheit der Functionen des Körpers im vorliegenden Falle nichts anderes als die Gesammtheit der auf der Rie-

mann'schen Fläche (J', J) eindeutigen und regulären Functionen. Die Beziehung auf die Riemann'sche Fläche ist für uns deshalb von Vortheil, weil wir diese in der Gestalt unseres Kreisbogenpolygons bequem übersehen können. Aus diesem Grunde wird auch in dem Buche über Modulf. die Terminologie der Riemann'schen Fläche festgehalten. Der Begriff des Körpers hat aber in anderer Hinsicht seine Vorzüge. Man kann nämlich den Functionen des Körpers die Bedingung auferlegen, daß sie nur ganzzahlige Coefficienten haben sollen. Diese Verschärfung des Begriffes läßt sich in dem Bilde der Riemannischen Fläche nicht gut durchführen.

Wir könnten nun, von den niedersten Fällen beginnend, an der Hand unserer Figuren die Functionen des Körpers (J', J) discutiren. Statt dessen werden wir hier lieber einen allgemeinern Weg

einschlagen, welcher indirect zu dem oben bezeichneten Ziele führt.

Wir betrachten statt der absoluten Invariante j die Invarianten g_2, g_3, Δ. Bei der Transformation n^{ter} Ordnung mögen diese übergehen in

$g_2' = g_2(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2)$, g_3', Δ'.

Um zu Modulfunctionen zurückzugelangen, bilden wir

$$\frac{g_2'}{g_2}, \quad \frac{g_3'}{g_3}, \quad \frac{\Delta'}{\Delta},$$

welche Ausdrücke ersichtlich nur von dem Quotienten $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega$ abhängen werden. Es zeigt sich sofort daß diese Grössen, ebenso wie j', $\psi(n)$ verschiedene Werthe besitzen, auf der Riemann'schen Fläche eindeutig sind und keine wesentlichen Singularitäten haben. Auf den Beweis gehen wir nicht weiter ein. Wir constatiren aber, daß die genannten Grössen in Folge dessen rationale Functionen von j' und j sein

werden und dass sich j' umgekehrt durch j und eine der genannten Functionen rational darstellen lässt. Es giebt aber noch <u>einfachere Functionen</u>, als die genannten, welche gleichfalls unserem Körper angehören, nämlich gewisse Wurzeln derselben. Wir bezeichnen

$$n \sqrt[n]{\frac{\Delta'}{\Delta}}$$

mit M (Multiplicator); auf den Grund dieser Benennung kommen wir später zurück. Dass diese Grösse, falls sie unserem Körper angehört, eine einfachere algebraische Function als $\frac{\Delta'}{\Delta}$ ist, ist klar. Denn die algebraische Gleichung, welcher M^{n} genügt und welche aus der algebraischen Gleichung für M leicht abgeleitet werden kann, hat jedenfalls eine complicirtere Gestalt wie die letztere.

Die in jedem Fall zu benutzende einfachste Function, welche noch

in unserem Körper liegt, geben wir in der folgenden Zusammenstellung an. Dabei beschränken wir uns auf solche Transformationsgraden, welche nicht durch 2 oder durch 3 theilbar sind. Es geschieht dies um nicht zu viele Fallunterscheidungen machen zu müssen. Wir haben daraufhin modulo 12 folgende vier Fälle zu unterscheiden:

$$n \equiv 1 \quad , \quad 5 \quad , \quad 7, \quad 11. \pmod{12}$$

$$n\sqrt[12]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = \mathcal{M}, \quad n^3\sqrt[4]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = \mathcal{M}^3, \quad n^2\sqrt[6]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = \mathcal{M}^2, \quad n^6\sqrt[2]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = \mathcal{M}$$

Eine Ausnahmestellung nimmt der Fall ein, wo n eine Quadratzahl ist. Eine Quadratzahl, welche weder durch 2 noch durch 3 theilbar ist, muss immer $\equiv 1 \pmod{12}$ sein. Für ein solches n liegt nicht nur die 12te, sondern sogar die 24te Wurzel von $\frac{\Delta'}{\Delta}$ in unserem Körper. Daher wird in diesem

Falle die einfachste Function:

$$\sqrt[24]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = \sqrt{\mathcal{H}}$$

Die angegebene Unterscheidung zwischen den verschiedenen Fällen können wir vermeiden, wenn wir unsern Rationalitätsbereich ein wenig erweitern. Wir wollen nicht nur J, sondern nach Bedarf auch noch die folgenden einfachen algebraischen Functionen von J als rational bekannt ansehen:

$$\gamma_2 = \sqrt[3]{J} = \frac{12 g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}, \quad \gamma_3 = \sqrt{J-1728} = \frac{216\, g_3}{\sqrt{\Delta}}$$

(in denen natürlich J selbst rational darstellbar ist).

Nach Erweiterung des Rationalitätsbereiches wird sich der Kreis der in unserem Körper befindlichen Functionen vergrössert haben.

Es zeigt sich, daß nunmehr $\mathcal{H}$

in allen Fällen zu unserem Körper gehört, d.h. einer Gleichung vom Grade $\psi(n)$ mit Coefficienten, die in j, γ_2 und γ_3 rational sind, genüge leistet.

U. zw. haben wir zu dem Ende im Falle $n \equiv 5$ (mod 12): γ_2, im Falle $n \equiv 7$: γ_3, im Falle $n \equiv 11$ sowohl γ_2 als γ_3 zu dem ursprünglichen Rationalitätsbereich zu adjungiren; im Falle $n \equiv 1$ ist natürlich eine solche Adjunction überflüssig. Es soll daher unser Rationalitätsbereich in den Fällen

$n \equiv 1$, $n \equiv 5$, $n \equiv 7$, $n \equiv 11$ (12)

aus den Functionen bestehen:

j, γ_2, γ_3, γ_2, γ_3.

Der Vorzug des „Multiplicators" M gegenüber der Grösse j' besteht in der grösseren Einfachheit der algebraischen Gleichung, durch welche M bestimmt wird. Wir nennen diese Gleichung „Multiplicatorgleichung"; sie lautet in den niedrigsten Prim=

zahl-Fällen, soweit sie nicht durch unsere obige Beschränkung ausgeschlossen sind:

$$n=5 \qquad M^6 + 10M^3 - g_2 M + 5 = 0$$

$$n=7 \qquad M^8 + 14M^6 + 63M^4 + 70M^2 + g_3 M - 7 = 0$$

$$n=11 \qquad M^{12} - 990M^6 + 440 g_2 M^4 - 165M^3 + 22 g_2^2 M^2 - g_2 g_3 M - 11 = 0.$$

In diesen Gleichungen kommt das, was soeben über den Rationalitätsbereich gesagt ist, zur Geltung. Wir bemerken an ihnen ferner die folgende Regelmässigkeit, welche für einen Primzahlgrad $n=p$ allgemein gilt: Alle Coefficienten der Gleichung mit Ausnahme des vorletzten sind durch p theilbar; der letzte Coefficient ist gleich $\pm p$, je nachdem $p \equiv \pm 1 \pmod 4$.

21.V.96. Historische Notizen über die Multiplicatorgleichung finden sich Modulf. II pg. 81. Wir erwähnen hiervon zunächst, was sich auf

die Bezeichnung „Multiplicator" bezieht. Die Grösse M. tritt in dieser Hinsicht zum ersten Male auf bei Klein, Math. Ann. Bd. 14, 1878, u. zw. bei der Transformation der elliptischen Integrale in der Weierstrassischen Normalform. Offenbar ist das Weierstrassische Integral

$$\int \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}$$

homogen von der + 1ten Dimension in ω_1, ω_2. Um es zu einer Grösse 0ter Dimension zu machen, kann man $\sqrt[12]{\Delta}$ als Factor hinzufügen. Darauf werden wir es als „normirtes Weierstrassischen Integral" bezeichnen.

In der Transformationstheorie vergleicht man nun zwei Weierstrassische Integrale, wobei direct

$$\int \frac{dp'}{\sqrt{4p'^3 - g_2' p' - g_3'}} = \int \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}},$$

Will man aber normirte Integrale betrachten, so wird man die vorher-

gehende Gleichung durch die folgende, übrigens genau dasselbe besagende, ersetzen:

$$\int \frac{\sqrt[12]{\Delta'} \cdot dp'}{\sqrt{4p'^3 - g_2' p' - g_3'}} = \frac{M}{n} \int \frac{\sqrt[12]{\Delta}\, dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}.$$

Hier sehen wir, spielt die Grösse $\frac{M}{n}$ die Rolle eines Multiplicators; sie tritt an die Stelle desjenigen Multiplicators, welcher in der älteren Theorie bei der Transformation der Jacobi'schen Normalintegrale vorkommt.

Die Eigenschaften der Multiplicatorgleichung werden vom Standpunkte der Modulfunctionen, d.h. durch Betrachtungen in der w-Ebene, begründet in der grossen Arbeit von Hurwitz, Math. Ann. Bd. 18, 1881.

Von anderer Seite ist Kiepert zu den Multiplicatorgleichung gekommen, man vergleiche ins Besondere die zusammenfassende

Arbeit:

Kiepert, Math. Ann. Bd. 26, 1885.

Kiepert geht von dem sog. speciellen Theilungsproblem der elliptischen Functionen aus. Die Grösse M, (für welche K. übrigens L^2 sagt) erscheint bei ihm durch die Wurzeln der Theilungsgleichung

$$\wp\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right),\ \wp'\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$$

ausgedrückt. Die Multiplicatorgleichung wird so zu einer Resolvente der Theilungsgleichung. Unter den reichhaltigen Details der Kiepert'schen Arbeiten heben wir in's Besondere hervor, daß hier die Darstellung der Grössen g_2', g_3' bez. j' durch M, sowie durch die (als rational bekannt anzusehenden) Grössen g_2, g_3 bez. j gegeben wird. Es ist dieses die Ausführung zu einer Bemerkung, welche wir auf pg. 61 machten, wonach man unter den Grössen

des Körpers ($\wp'$, $\wp$) möglichst einfache (eben unser M.) aufsuchen und durch diese sowie durch die rational bekannten Grössen alle übrigen darstellen sollte. Diese Darstellung wird von Kiepert explicite geleistet.

In dem Buche von Weber wird die Gleichung für M als „invariante Multiplicatorgleichung" bezeichnet, weil die Grösse M mit den „Invarianten" g_2, g_3 zusammenhängt. Diese Bezeichnung scheint uns nicht zweckmässig. Will man die Multiplicatorgleichung für M von anderen Multiplicatorgleichungen, wie solche ja in der Jacobi'schen Theorie vorkommen, unterscheiden, so sollte man sie als Multiplicatorgleichung <u>1ten Stufe</u> bezeichnen, denn auch die Jacobi'sche Multiplicatorgleichung bleibt bei gewissen ω-Substitutionen invariant, nur nicht bei den Substitutionen der 1ten, sondern bei denen der 2ten Stufe.

Wir werden jetzt die ganze Fragestellung verallgemeinern, indem wir eine Transformationstheorie bei beliebiger Stufenzahl entwickeln. Hiervon handelt ein besonderes Capitel der Modulf. (Bd. II, Cap. 3)

Es sei $\varphi(\omega)$ eine Modulfunction etwa von der r^{ten} Stufe. Bei einer Transformation n^{ter} Ordnung geht dieselbe über in $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$. Hier entsteht nun die Aufgabe, den algebraischen Zusammenhang zwischen $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ und $\varphi(\omega)$ in ähnlicher Weise zu untersuchen, wie es mit der algebraischen Beziehung zwischen $J\left(\frac{\omega}{n}\right)$ und $J(\omega)$ geschehen ist.

Das allgemeine Résultat, welches sich in dieser Hinsicht ergiebt, lautet folgendermassen:

Solange r und n relativ prim sind, liegt alles ähnlich wie bei den Functionen der 1ten Stufe. Besonderheiten treten nur auf, wenn r und n einen Theiler gemein

haben. In allen Fällen aber sind die beiden Moduln durch eine algebraische Gleichung verbunden.

Hierzu zunächst einige Beispiele aus der vorhandenen Litteratur. Die sog. „Modulargleichung", welche in der Jacobi'schen Theorie vorkommen, liefern den algebraischen Zusammenhang zwischen dem Modul

$$\sqrt[8]{\lambda(\omega)} = \sqrt[4]{k}$$

und den durch Transformation $n$ter Ordnung aus ihm entstehenden Grössen. Der hier betrachtete Modul ist von der 16ten Stufe. Nach der obigen allgemeinen Bemerkung hat man daher zwischen geradem und ungeradem n zu unterscheiden. Für ein ungerades n wird die Theorie der Jacobi'schen Modulargleichung ganz ähnlich ausfallen, wie die Theorie der Gleichung $F(J', J)$.

Ferner erwähnen wir die sogen. Schläfli'schen Modulargleichung

Schläfli beschäftigt sich in Crelle Bd. 72, 1870 mit der Transformation des Moduls 48ter Stufe

$$\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)} = \sqrt[12]{kk'},$$

welcher bemerkenswerthe einfache Resultate liefert, worauf insbesondere Weber in seinem Buche zurückgekommen ist. Da 48 die Primfactoren 2 und 3 enthält, sind hier die geraden und die durch 3 theilbaren Transformationsgrade besonders zu behandeln.

In dieser Vorlesung werde ich indessen die Transformationstheorie des Moduls $z(\omega)$, d. h. der Ikosaederirrationalität bevorzugen, ohne darum behaupten zu wollen, daſs dieser Modul interessanter ist als andere. Es ist mehr, daſs ich wünsche, die Ikosaederirrationalität $z(\omega)$ nach allen Richtungen zur Geltung zu bringen, und daſs ich der allgemeinen Untersuchung der höheren Moduln einen neuen An-

stoßs geben möchte.

Die Grösse $\zeta(\omega)$ ist wie wir wissen, Hauptmodul der fünften Stufe. Nun zerfallen Modulo 5 die $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ Substitutionen in 60 Klassen. Zwischen J und ζ besteht daher eine Gleichung 60ten Grades $J = R_{60}(\zeta)$, die sog. Ikosädergleichung, die wir schon oben angaben, ihre Wurzeln drükken sich linear durch eine aus. Wir schreiben die 60 Wurzeln in dem folgenden Schema zusammen, in welchem $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ ist (Vergl. Ikosaeder pag. 43):

$$\varepsilon^{\mu}\zeta\,, \qquad -\frac{\varepsilon^{\mu}}{\zeta}$$

$$\varepsilon^{\mu}\cdot\frac{-(\varepsilon-\varepsilon^{4})\varepsilon^{\nu}\zeta+(\varepsilon^{2}-\varepsilon^{3})}{(\varepsilon^{2}-\varepsilon^{3})\varepsilon^{\nu}\zeta+(\varepsilon-\varepsilon^{4})}\,, \qquad \varepsilon^{\mu}\cdot\frac{(\varepsilon^{2}-\varepsilon^{3})\varepsilon^{\nu}\zeta+(\varepsilon-\varepsilon^{4})}{(\varepsilon-\varepsilon^{4})\varepsilon^{\nu}\zeta+(\varepsilon^{2}-\varepsilon^{3})}.$$

Geben wir hierin μ und ν die Werthe 1, 2, 3, 4, 5, so stellt die erste Zeile 2×5, die zweite 2×25 Werthe dar. Im Ganzen haben wir hier die 60 Wurzeln der Ikosaedergleichung vor uns.

Wir haben hier vor allen Dingen

zu constatiren, daß die Coefficienten der angeschriebenen Substitutionen nicht im natürlichen, sondern in dem durch die 5te Einheitswurzel erweiterten Rationalitätsbereiche liegen. Daher können wir die Ikosaedergleichung nur dann als Galois'sche Gleichung bezeichnen, wenn wir diese Einheitswurzel adjungiren.

Das Hereinspielen der Zahlenirrationalität ε ist für uns besonders interessant. Wir werden uns später darüber klar werden müssen, welche Folgen dieser Umstand für die Theorie der singulären ellip. tischen Gebilde hat, nämlich für denjenigen von uns zu entwickelnden Theil dieser Theorie, der sich mit der Ikosaederirrationalität $\zeta(w)$ beschäftigt.

22. V. 96. Um Anschluß an die Formentheorie zu gewinnen, werden wir die Ikosaedergleichung homogen machen, indem wir setzen $\zeta = \zeta_1/\zeta_2$; sie lautet dann:

$$J : J-1 : 1 = H^3(\xi_1, \xi_2) : -T^2(\xi_1, \xi_2) : 1728 f^5(\xi_1, \xi_2)$$

Die Formen H, T und f, welche bez. von der 20ten, 30ten und 12ten Dimension sind, haben ein einfaches Bildungsgesetz. Nennen wir f die Grundform, so wird nämlich H die Hesse'sche Form von f und T die Functionaldeterminante von f und H. Man erkennt hier den Nutzen der homogenen Variabelen. Übrigens haben wir

$$f = \xi_1 \xi_2 (\xi_1^{10} + 11 \xi_1^5 \xi_2^5 - \xi_2^{10})$$

Ebenso wie die Variable ξ werden wir auch die Substitutionen von ξ homogen spalten. Wir richten es so ein, daß die entstehende binäre Substitution die Determinante 1 erhält und sprechen dann von einer <u>unimodularen binären Substitution</u>. Z. B. erreichen wir dieses bei der Substitution

$$\zeta' = \varepsilon \zeta$$

dadurch dass wir setzen

$$\zeta_1' = \pm \varepsilon^3 \zeta_1$$
$$\zeta_2' = \pm \varepsilon^2 \zeta_2 .$$

Bei dieser Spaltung bleibt nothwendiger Weise ein Vorzeichen unbestimmt, so dass sich die Zahl der Substitutionen von 60 auf 120 vergrössert. Ebenso wie die nicht-homogene Ikosaedergleichung bei den pg 76 angegebenen 60 nicht-homogenen Substitutionen von ζ, bleibt die homogen-gemachte Ikosaedergleichung und sogar die einzelne Form f, H und T bei den 120 homogenen unimodularen Substitutionen von ζ_1, ζ_2 ungeändert.

Wir kommen nun zu der Transformationstheorie des Moduls $\xi(\omega)$. Dieselbe ist ausführlich von Friedrich in seiner Dissertation, Leipzig 1886 behandelt. Vergl. andererseits Modulf. II pg 150. Setzen wir den Transformationsgrad

zu 5 relativ prim voraus, so bekommen wir ganz ähnliche Resultate wie pag. 28 für die 1te Stufe.

1. Zunächst wissen wir, daß

$$\xi = \mathfrak{f}(\omega)$$

bei den Substitutionen der Hauptcongruenzgruppe 5ter Stufe und bei keinen anderen Umänderungen von ω ungeändert bleibt. Wir wollen dieselben durch die Schreibweise

$$\omega' = \frac{\mathcal{A}\omega + \mathcal{B}'}{\mathcal{C}\omega + \mathcal{D}'} \begin{pmatrix} \mathcal{A} \equiv \mathcal{D}' \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\ 5) \\ \mathcal{B}' \equiv \mathcal{C} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 5) \end{pmatrix}$$

kenntlich machen.

2. Sodann fragen wir, bei welchen dieser Substitutionen die transformirte Grösse

$$\xi' = \mathfrak{f}\left(\frac{\omega}{n}\right)$$

ungeändert bleibt. Wir können unsere Substitution ersichtlich so schreiben:

$$\frac{\omega}{n}' = \frac{\mathcal{A}\left(\frac{\omega}{n}\right) + \frac{\mathcal{B}'}{n}}{\mathcal{C}_n\left(\frac{\omega}{n}\right) + \mathcal{D}'}$$

und erkennen sofort, daß $\mathfrak{Z}\left(\frac{\omega}{n}\right)$

ungeändert bleibt, wenn nur $\frac{\mathfrak{B}}{n}$ eine ganze Zahl ist. Dieselbe Bedingung haben wir pg. 39 bei der Transformation von J kennen gelernt. Das Besondere ist hier nur, daſs $\mathfrak{B}'$ von vornherein bereits der Congruenz $\mathfrak{B}' \equiv 0 \pmod 5$ genügt. Es ist nun verständlich, daſs diese beiden Congruenzen in keiner Weise collidiren, sofern wir n relativ prim zu 5 voraussetzen, wie wir esthaten, und das weiterhin eine ganz ähnliche Transformationstheorie herauskommt, wie auf der 1ten Stufe.

3. Wir bestimmen jetzt den Index derjenigen Untergruppe, welche aus der Hauptcongruenzgruppe 5ter Stufe durch die Bedingung

$$\mathfrak{B}' \equiv 0 \pmod n$$

ausgesondert wird. Derselbe ergiebt sich wie früher zu

$$\psi(n) = \left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{q}\right) \cdots$$

Die Substitutionen $\begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B}' \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D}' \end{pmatrix}$ zer-

fallen also für uns in $\Psi(n)$ Classen. Zu jeder Classe können wir wie früher einen Repräsentanten wählen etc. etc.

4. Dementsprechend besteht der Fundamentalbereich unserer Untergruppe aus $\Psi(n)$ Einzelbereichen, d.h. hier aus $\Psi(n)$ Ikosaedernetzen, deren jedes seinerseits aus 60 Doppeldreiecken der ursprünglichen Modultheilung besteht.

5. Der nächste Schritt wird der sein, dass wir das Verhalten von $\zeta'(\omega)$ und $\zeta(\omega)$ in dem genannten Fundamentalbereiche durch Aufstellen von Reihenentwickelungen in ähnlicher Weise wie pg. 49 untersuchen. Dabei zeigt sich, daſs ζ und ζ' relativ zum Fundamentalbereiche keine wesentliche Singularitäten haben.

6. Mithin besteht zwischen ζ und ζ' eine algebraische Relation, welche wir vorläufig so schreiben wollen:

$$f_1(\xi', \xi) = 0.$$

Sie ist vom Grade $\psi(n)$ in jeder der beiden Variabeln, besitzt ganzzahlige Coefficienten etc. Wir bezeichnen sie als Transformationsgleichung n^{ter} Ordnung der Ikosaederirrationalität.

Nun wäre die Frage, wie wir diese Gleichung wirklich aufstellen können. Zunächst möchte es scheinen, daß dieses im jetzigen Falle noch umständlicher sein wird, wie im Falle der Transformationsgleichung bei Zugrundelegung des j. In Wirklichkeit aber geht es viel einfacher.

Der Grund hiervon liegt in den besonderen algebraischen Eigenschaften unserer Gleichung, welche sich aus der Betrachtung der w-Ebene ergeben. Wir lassen w von einem Anfangswerthe aus in andere vermöge der Gesamtgruppe aequivalente Werthe über-

gehen. Dabei erleidet $\xi(\omega)$ die sämmtlichen 60 Ikosaedersubstitutionen, sofern wir nur auf ω aus jeder der modulo 5 unterschiedenen 60 Classen von Substitutionen mindestens eine ausüben. Wir thun dieses, indem wir die folgenden Substitutionen betrachten ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen von der Determinante 1):

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta n}{\gamma\omega + \delta}$$

Dieselben enthalten in der That, da n zu 5 relativ prim ist, Substitutionen aus allen 60 Classen unter sich. Mithin haben wir

$$\xi\left(\frac{\alpha\omega + \beta n}{\gamma\omega + \delta}\right) = \mathcal{S}(\zeta),$$

wo $\mathcal{S}(\xi)$ eine Ikosaedersubstitution bedeutet u. zw. jede beliebige, wenn wir $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ geeignet verändern.

Zu gleicher Zeit erleidet aber auch $\xi'(\omega)$ eine Ikosaedersubstitution. Wir haben nämlich:

$$\xi\left(\frac{1}{n}\,\frac{\alpha\omega+\beta n}{\gamma\omega+\delta}\right) = \xi\left(\frac{\alpha\frac{\omega}{n}+\beta}{\gamma n\cdot\frac{\omega}{n}+\delta}\right) = S'(\xi'),$$

unter S' wieder eine geeignete Ikosaedersubstitution verstanden.

Wenn also ξ übergeht in $S(\xi)$, wobei die Substitution S dem Schema entspricht: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta n\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, so verwandelt sich ξ' in $S'(\xi')$, wo nun S' durch das folgende Schema bestimmt wird: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma n & \delta\end{pmatrix}$.

Lassen wir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ alle möglichen Werthe durchlaufen, so erleidet ξ alle möglichen Ikosaedersubstitutionen und ξ' gewisse jenen in gesetzmässiger Weise zugeordnete simultane Ikosaedersubstitutionen. Dabei genügt es schon, für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die sämmtlichen modulo 5 genommenen Zahlen zu setzen, die $\alpha\delta - \beta\gamma n = 1$ ergeben, weil 2 nach dem Modul 5 congruente Substitutionen eo ipso die gleichen Werthe von ξ und ξ' ergeben.

Die somit aufgefundene Eigenschaft der Wurzeln unserer Gleichung wollen wir als eine Eigenschaft der Gleichung selbst formuliren. Wir können dann sagen: *Unsere Gleichung $f_1(\zeta',\zeta)=0$ bleibt bei gewissen simultanen Ikosaedersubstitutionen der Variabeln ζ',ζ ungeändert.* Des Genauern müssen wir 4 Fälle unterscheiden, je nachdem $n \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod 5$ ist.

Die Zusammenordnung der simultanen Substitutionen wird besonders einfach im Falle $n \equiv 1 \pmod 5$. Alsdann sind nämlich die auf der vorigen Seite angegebenen Schemata nach dem Modul 5 überhaupt nicht verschieden. Mithin bleibt in diesem Falle die Gleichung $f_1(\zeta',\zeta)=0$ ungeändert, wenn wir ζ und ζ' *denselben, übrigens beliebigen Ikosaedersubstitutionen* unterwerfen, oder, wie wir sagen können, wenn wir ζ und ζ' *cogredient* substituiren.

Hinsichtlich der anderen Fäl-

le theilen wir Folgendes ohne Beweis mit: man erhält aus der Substitution von ξ' die zugehörige von ξ, wenn man die in jener vorkommende Grösse ε durch ε^n ersetzt. Bei der so hergestellten simultanen Substitution von ξ, ξ' bleibt dann die Gleichung $f_1(\xi, \xi') = 0$ wiederum ungeändert.

Im Folgenden beschränken wir uns der Kürze halber auf den Fall $n \equiv 1 \pmod 5$. Um aus der geschilderten algebraischen Eigenthümlichkeit ein Verfahren zur Herstellung der Gleichung abzuleiten, nehmen wir wieder Bezug auf die Formentheorie. Wir schreiben unsere Gleichung homogen - machend

$$f_1(\xi_1', \xi_2'; \xi_1, \xi_2) = 0$$

und üben auf die Variabeln cogrediente binäre unimodulare Ikosaedersubstitutionen aus. Dann bleibt nicht nur die Gleichung

sondern auch die linke Seite der Gleichung, d. h. die Form $f(\xi_1', \xi_2'; \xi_1, \xi_2)$ ungeändert. Im Uebrigen bemerken wir ohne es hier auszuführen dass f auch bei Vertauschung der ξ und ξ' ungeändert bleiben muss.

Wir suchen nun zunächst die einfachsten Formen dieser Art auf und bilden das vollständige System solcher Formen, aus denen sich alle übrigen Formen rational und ganz darstellen lassen. Wir können sofort vier doppelt-binäre Formen in $\xi_1', \xi_2'; \xi_1, \xi_2$ angeben, welche in diesen beiden Variabelreihen symmetrisch sind, bei Ausübung unserer simultanen Ikosaëder-substitutionen ungeändert bleiben. Es sind dieses:

$A_1 = \xi_1 \xi_2' - \xi_2 \xi_1'$

$A_6 = 6^{\text{ten}}$ Polare von $f(\xi_1, \xi_2)$,

$A_{10} = 10^{\text{ten}}$ " " $H(\xi_1, \xi_2)$,

$A_{15} = 15^{\text{ten}}$ " " $T(\xi_1, \xi_2)$.

Dass die Form A_1, oder vielmehr die geraden Potenzen von A_1 (und andere kommen weiterhin nicht vor) die genannten Eigenschaften besitzen, ist von vornherein klar. Was A_6, A_{10}, A_{15} betrifft, so wird bei der Polarenbildung der Grad von f, H, T in ξ, welcher bez. gleich 12, 20, 30 ist, auf 6, 10, 15 Einheiten verringert, wofür der Grad in ξ' auf 6, 10, 15 ansteigt. Dass diese Formen bei den simultanen Ikosaedersubstitutionen invariant bleiben, folgt aus der Invarianten-Natur des Polarenprozesses und daraus, dass die Formen f, H, T sich bei Ikosaedersubstitutionen von ξ_1, ξ_2 nicht ändern.

Es zeigt sich nun weiter, dass die angeschriebenen vier Formen das volle Formensystem für die Invarianten der Ikosaedersubstitutionen bilden. Daraufhin können wir unsere gesuchte Form f_1 als ganze Function der A_1, A_6, A_{10},

A_{15} mit unbestimmten Coefficienten ansetzen.

Die Möglichkeit dieses Verfahrens ist durchaus an die homogene Formulirung des Problems gebunden. Wegen der allgemeinen Durchführung vgl. die genannte Dissertation von Friedrich oder auch Modulf. II pg. 137–141, wo auch die Fälle $n = 2, 3, 4 \pmod 5$ berücksichtigt sind.

Hier wollen wir uns auf ein Zahlenbeispiel beschränken, indem wir $n = 11$ nehmen. Nach der Rechnung von Friedrich, die sich auf die Reihenentwickelungen von ζ und ζ' stützt, lautet die Transformationsgleichung, welche vom Grade $\psi(n) = 12$ ist, folgendermassen:

$$11 \cdot 17 \cdot A_6^2 - 18 \cdot 49 A_1^2 A_{10} - 8 \cdot 11 \cdot 835 \cdot A_1^6 A_6 - 17 \cdot 75841 A_1^{12} = 0$$

Wir bemerken noch, dass an die Ausrechnung der entsprechenden Transformationsgleichung für J, J' gar nicht zu denken ist,

da schon die Transformationsgleichung 3ter Ordnung, wie wir sahen, ausserordentlich complicirt war. Die relativ einfache Gestalt der Transformationsgleichungen für ζ, ζ' liegt in der Einführung der Aggregate A_1, A_6, A_{10}, A_{15} begründet, die allerdings ihrerseits ziemlich complicirte Functionen von ζ, ζ' sind.

Mit der Aufstellung der einen Gleichung $f_1(\xi', \xi) = 0$ ist indessen die Theorie der Transformationen 5ter Stufe nicht abgeschlossen. Wir können nämlich statt des willkürlich herausgegriffenen Werthes $\xi(\omega)$ ebenso gut ausgehen von einem der 59 anderen Werthe $\xi\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)$, wo die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ modulo 5 zu unterscheiden sind. Es bedeutet dieses nichts Anderes, als daß wir den Werth von ξ einer der 60 Ikosaedersubstitutionen unterwerfen. Zu jedem dieser Werthe können wir dann die zugehörige Gleichung vom Grade $\psi(n)$ auf-

stellen, welche ihn mit dem transformirten Werthe $\xi' = \xi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ verbindet. Diese 60 Gleichungen müssen natürlich übereinstimmen mit denjenigen, die man aus $f(\xi', \xi) = 0$ ableitet, indem man auf ξ allein die 60 Ikosaedersubstitutionen ausübt.

In entsprechender Weise könnten wir auch mit ξ' verfahren, indem wir $\xi'(\omega)$ durch $\xi'\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)$ ersetzen. Es scheint hiernach, dass wir aus jeder der vorgenannten 60 Gleichungen abermals 60 neue Gleichungen erhalten, im Ganzen also 3600. Dem ist aber nicht so; denn jede von diesen Gleichungen geht durch gewisse 60 simultane Ikosaedersubstitutionen für ξ und ξ' in sich über, wie wir es gerade für f, sahen und von da aus für die übrigen erschliessen.

Es bleiben also nur 60 un=

verschiedene Gleichungen übrig. Diese Gleichungen seien:

$$f_1(\zeta'; \zeta) = 0$$
$$f_2(\zeta'; \zeta) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_{60}(\zeta'; \zeta) = 0$$

Hier entsteht die interessante Aufgabe, diese 60 Gleichungen in ihren gegenseitigen Beziehungen neben einander zu betrachten. Hier kommt vor allem der Begriff gleichberechtigter Gleichungen zur Geltung. Wir werden nämlich zwei Gleichungen dann gleichberechtigt nennen, wenn wir sie dadurch in einander überführen können, dass wir auf ζ' und ζ gleichlautende Ikosaedersubstitutionen oder, wie man auch sagt, cogrediente Ikosaedersubstitutionen, ausüben. Doch können wir Näheres hierüber erst später mittheilen.

Zweiter Haupttheil.

Composition zusammengehöriger ganzzahliger Gitter.

4. VI. 96. Wir wenden uns nun zu neuen arithmetischen Entwickelungen betr. ganzzahlige Gitter. Dieselben sollen uns hernach gute Dienste leisten, wenn wir fragen, wie sich die allgemeine Transformationstheorie der elliptischen Functionen im Falle ganzzahliger Gitter modificieren mag. Das Specifische unserer neuen Betrachtungen ist, daſs wir immer diejenigen ganzzahligen Formclassen, welche zu derselben Discriminante D gehören, neben einander betrachten. Wir lernten früher (vergl. Teil I pg 169), daſs die Zahl dieser Classen eine endliche ist. Unter den Discriminan-

ten überhaupt sind von besonderer Wichtigkeit diejenigen, welche wir pag. 33 <u>Stammdiscriminanten</u> nannten und welche wir mit d bezeichnen wollen. Ihre Wichtigkeit beruht auf dem Satze von pg. 33, nach welchem alle Gitter, deren Discriminante keine Stammdiscriminante ist, sondern aus einer solchen durch Multiplication mit n^2 hervorgeht, aus Stammgittern durch Transformation n^{ter} Ordnung gewonnen werden. Die Stammdiscriminanten zerfallen, wie gleichfalls pg. 33 hervorgehoben, in zwei Arten, je nachdem d durch 4 theilbar ist oder nicht.

<u>Ist $d \equiv 0 \pmod 4$, so bezeichnen wir d als Stammdiscriminante erster Art, ist $d \equiv 1 \pmod 4$, so bezeichnen wir d als Stammdiscriminante zweiter Art.</u> Unter den zu gleicher Stammdiscriminante gehörigen Formen giebt es eine ausgezeichnete, welche <u>Hauptform</u> heisst.

Und zwar definiren wir

$X^2 - \frac{d}{4} y^2$ als <u>Hauptform erster Art</u>

$X^2 + Xy + \frac{1-d}{4} y^2$ als <u>Hauptform zwei-ter Art</u>.

Allemal konnten wir eine quadratische Form in zwei Linearfactoren spalten, welche wir als <u>Gitterzahlen</u> oder auch als Minimalcoordinaten bezeichneten. Diese Grössen waren nur bis auf einen willkürlichen Factor bestimmt, den sog. „<u>Azimuthalfactor</u>". Wir setzen bereits fest, dass bei negativer Discriminante der Azimuthalfactor den absoluten Betrag 1 haben (vergl. Teil I pg 67) und dass er bei positiver Discriminante reell sein sollte (vergl. Theil I pg 78). Das Product zweier zusammengehöriger Azimuthalfactoren musste dabei stets gleich 1 sein.

Speciell liegt nun bei den Hauptformen eine bestimmte Art der Spaltung besonders nahe, welche wir

hiermit verabreden wollen: <u>Wir werden eine Hauptform erster Art in die Factoren</u>

$$\xi = x + \frac{\sqrt{d}}{2}y, \quad \eta = x - \frac{\sqrt{d}}{2}y$$

<u>und eine Hauptform zweiter Art in</u>

$$\xi = x + \frac{1+\sqrt{d}}{2}y, \quad \eta = x + \frac{1-\sqrt{d}}{2}y$$

<u>auflösen, wodurch bei den Hauptformen die Azimuthalfactoren festgelegt sind.</u>

Wir wollen ferner für die Hauptformen eine feste Art der geometrischen Darstellung verabreden, indem wir ihnen ein ganz bestimmtes Gitter coordiniren. Aus dem ersten Theile dieser Vorlesung wissen wir, daß wir jeder Form jedes beliebige Gitter zuordnen können, wofern wir nur die Maassbestimmung in der Ebene geeignet definiren. Indessen ist es bequem, bei den folgenden Betrachtungen speciell in folgender Art zu verfahren:

Es handle sich zuerst um

Hauptformen erster Art. Je nachdem d positiv oder negativ ist, haben wir noch zwei verschiedene Fälle von Hauptformen erster Art zu unterscheiden. Wir gehen von einem rechtwinkligen Coordinatensystem u, v aus, wobei jedem Punkt der Ebene in gewöhnlicher Weise zwei Coordinaten u, v entsprechen. Wir setzen dann

bei positivem d

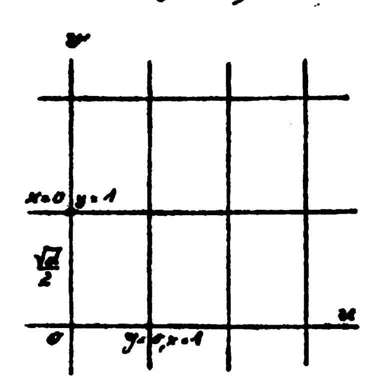
$$x = u \quad , \quad y = \frac{2v}{\sqrt{d}} \; ,$$

bei negativem d

$$x = u \quad , \quad y = \frac{2iv}{\sqrt{d}} \; .$$

Die Gitterecke $x = 1, y = 0$ wird infolgedessen mit dem Punkte $u = 1, v = 0$ der Ebene zusammenfallen. Andrerseits fällt die Gitterecke $x = 0, y = 1$ in den Punkt $u = 0, v = \frac{\sqrt{d}}{2}$ bez. (bei negativem d) in den Punkt $u = 0, v = \frac{\sqrt{d}}{2i}$. Durch die genannten beiden Eckpunkte und den Anfangspunkt ist ein erstes Parallelogramm unseres Gitter und

weiterhin das ganze Gitter bestimmt. Das Gitter wird, wie man sieht (vergl. die folgende Figur),



ein rechteckiges Gitter. Die zugehörigen Gitterzahlen sind nach pag. 97, je nachdem $d>0$ oder $d<0$ ist:

$$\xi = u+v, \quad \eta = u-v \qquad \text{bez.} \qquad \xi = u+iv, \quad \eta = u-iv.$$

Wir betrachten zweitens die Hauptformen zweiter Art. Nachdem wir, wie vorher, ein gewöhnliches rechtwinkliges Coordinatensystem u, v definirt haben, setzen wir im

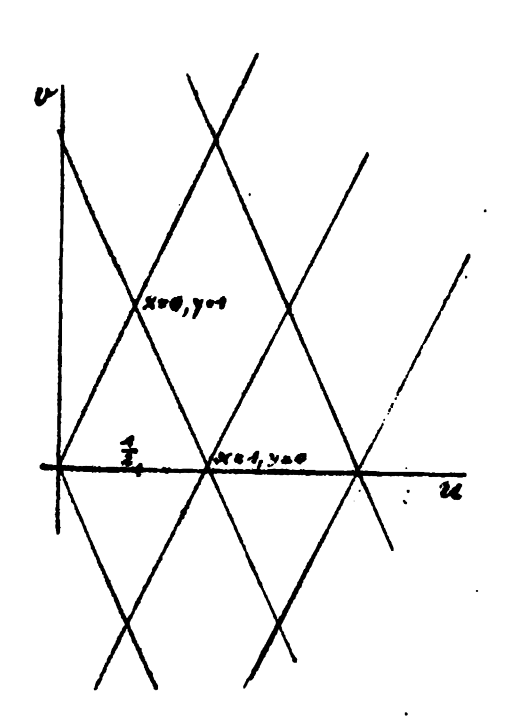
Falle $d > 0$ bez. $d < 0$;

$$u = x + \frac{y}{2} \qquad \text{bez.} \qquad u = x + \frac{y}{2}$$

$$v = \frac{\sqrt{d}\cdot y}{2} \qquad\qquad v = \frac{\sqrt{d}\cdot y}{2i}$$

Hiernach bestimmen wir die den Ecken des ersten Parallelogramms entsprechenden Punkte der Ebene. Offenbar hat der Punkt $x = 1$, $y = 0$ die Coordinaten $u = 1$, $v = 0$. Dieser Eckpunkt hat also dieselbe Lage, wie vorher, es ist der Einheitspunkt der u Axe.

Ferner haben wir im Punkte $x = 0$, $y = 1$ die Coordinaten $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{\sqrt{d}}{2}$ bez. $v = \frac{\sqrt{d}}{2i}$. Mithin liegt der Eckpunkt $x = 0$, $y = 1$ jetzt nicht wie vorher auf der v-Axe; vielmehr hat er von dieser den Abstand $\frac{1}{2}$. Das aus dem Punkt $x = 0$, $y = 1$ und $x = 1$, $y = 0$ sowie aus dem Anfangspunkte gebildete Dreieck ist ein gleichschenkliches; durch geeignete Verdoppelung desselben (vergl. die Figur auf Seite 101) erhalten wir als erstes Parallelo-



gramm unseres Gitters einen Rhombus. Den Hauptformen zweiter Art entspricht also in Folge unserer Verabredung ein <u>rhombisches Gitter</u>. Die zugehörigen Gitterzahlen drücken sich durch die Coordinaten u und v gerade so aus, wie bei den Hauptformen erster Art; es wird nämlich

$$\xi = u + v \qquad \text{bez.} \qquad \xi = u + iv$$
$$\eta = u - v \qquad\qquad \eta = u - iv.$$

Wir können, zusammenfassend für beide Formenarten, die geometrische Bedeutung der Gitterzahlen in

der u, v- Ebene dadurch beschreiben, dass wir sagen:

Im Falle eines positiven d sind die Gitterzahlen die mit $\sqrt{2}$ multiplicirten Abstände, welche die Eckpunkte des Gitters von den die Quadranten der u, v- Ebene halbirenden Geraden besitzen. Im Falle eines negativen d aber sind es die gewöhnlichen complexen Zahlen, welche man den Gittereckpunkten in der Gaussischen Ebene beizulegen gewohnt ist.

In der That wird f beziehungsweise gleich $u^2 - v^2$ und $u^2 + v^2$ sein.

Wir werden nun zeigen, dass die hiermit durchgeführte Construction der Hauptgitter in dem allerengsten Zusammenhange mit der Theorie der quadratischen Körper steht, welche sonst in abstracter Weise entwickelt wird und die hier in ihren Grundlagen als bekannt vorausgesetzt werden

soll (vergl. etwa die Darstellung in Dedekind's Zahlentheorie oder auch die Protocolle des Wintersemi- nars).

Ein quadratischer Körper wird definirt durch die Irrationalität $\sqrt{m}$, wo m als quadratfreie Zahl vorausgesetzt wird, indem nämlich ein etwaiger quadratischer Thei- ler von m für den Körper irrele- vant wäre. Bestimmt man nun die ganzen algebraischen Zahlen des Körpers $k(\sqrt{m})$, so wird eine Fallunterscheidung nöthig, je nachdem

$$m \equiv 2 \quad \text{bez.} \equiv 3 \pmod 4$$

oder

$$m \equiv 1 \pmod 4$$

ist. Im ersten Falle haben die ganzen Zahlen des Körpers die Gestalt:

$$x + y\sqrt{m}\,;$$

im zweiten Falle sind sie darge- stellt durch

$$x + y\,\frac{1+\sqrt{m}}{2}\,,$$

wo beidemal unter x und y ganze rationale Zahlen verstanden werden. Als Basis des Körpers haben wir hiernach zu bezeichnen:

im ersten Falle die beiden Grössen

$$1, \sqrt{m},$$

im zweiten Falle die beiden folgenden Zahlen

$$1, \frac{1+\sqrt{m}}{2}$$

Als Discriminante dieses Körpers definirt man bekanntlich das Quadrat der aus der Basis und ihren conjugirten Werthen gebildeten Determinante. Hiernach wird im ersten Falle:

$$d = \begin{vmatrix} 1, \sqrt{m} \\ 1, -\sqrt{m} \end{vmatrix}^2 = 4m$$

im zweiten Falle dagegen:

$$d = \begin{vmatrix} 1, & \frac{1+\sqrt{m}}{2} \\ 1, & \frac{1-\sqrt{m}}{2} \end{vmatrix}^2 = m.$$

Den ganzen algebraischen Zahlen des Körpers können wir hiernach im einen oder anderen Falle bez.

die Form geben:

$$x + y\frac{\sqrt{d}}{2} \quad \text{bez.} \quad x + y\frac{1+\sqrt{d}}{2}.$$

Das sind aber, wie wir sehen, genau dieselben Verbindungen, welche wir oben (pag 96) als Gitterzahlen ξ bezeichneten und aus den zur Discriminante d gehörigen Hauptformen 1ter und 2ter Art ableiteten. Das heisst also: *die zu der Hauptform einer Stammdiscriminante d vermöge unserer Verabredungen gehörigen Gitterzahlen ξ sind mit den ganzen algebraischen Zahlen des Körpers $K(d)$ genau identisch.*

Unsere Gitterbetrachtung weist uns aber darauf hin, *neben den Gitterzahlen ξ gleichzeitig die Gitterzahlen η im Auge zu haben.* Für die Körpertheorie ergiebt sich daraus, dass wir *neben dem Körper $\sqrt{d}$* (welcher von dem Körper $\sqrt{m}$ ersichtlich nicht verschieden ist) *gleichzeitig den conjugirten Kör-*

per $-\sqrt{d}$ stellen sollen.

Diese Modification der Betrachtung ist allerdings im Falle des quadratischen Körpers keine eigentliche Erweiterung; da nämlich $-\sqrt{d}$ ersichtlich rational durch $+\sqrt{d}$ ausgedrückt werden kann, so ist $R(-\sqrt{d})$ mit $R(+\sqrt{d})$ identisch. Dieselbe sehr selbstverständliche Thatsache meint man, wenn man sagt: Der quadratische Körper ist ein Galois'scher Körper: oder: die quadratische Gleichung ist eine Galois'sche Gleichung. Trotzdem ist die durch unser Gitter indicirte consequente Nebeneinanderstellung der Zahlen $x+y\frac{\sqrt{d}}{2}$ und $x-y\frac{\sqrt{d}}{2}$ etc. sehr nützlich. Es gilt das in verstärktem Maasse, wenn wir zu höheren Körpern schreiten.

Wie sich unser geometrisches Bild auf diese höheren Fälle erweitert, ist unmittelbar verständlich. Wir haben dann nicht ein von Geraden gebildetes Gitter in der Ebene,

sondern ein Gitter im R_n zu betrachten, welches von einem Systeme paralleler aequidistanter R_{n-1} gebildet wird. Die discontinuirliche Anordnung der Gitter-Eckpunkte im R_n ist etwas durchaus übersichtliches. Dementsprechend wird sich bei gleichzeitiger Betrachtung der zu jedem Gitterpunkte gehörigen n Coordinaten (Gitterzahlen) eine übersichtliche Theorie der Gitterzahlen ergeben. Beschränken wir uns aber nur auf einen der n conjugirten Körper, d. h. auf nur eine der n Coordinaten der Gitterpunkte, so bedeutet dieses geometrisch, daſs wir das n-dimensionale Gitter auf eine Mannigfaltigkeit von nur einer Dimension projiciren. Hierbei entsteht natürlich ein verworrenes Bild der räumlichen Anordnung, dessen Punkte auf der gewählten Coordinatenaxe im Allgemeinen überall dicht liegen werden.

Dementsprechend wird die Theorie der Gitterzahlen von diesem beschränkteren Standpunkte aus unübersichtlich werden. Übrigens kommt ja ganz dieselbe Bemerkung in der Theorie der Abel'schen Functionen zur Geltung, welche gerade durch den von Jacobi vollzogenen Übergang zu höheren Dimensionen ihre heutige einfache Gestalt gewonnen hat.

11. VI. 96. Nachdem wir im Vorhergehenden für die Hauptformen eine bestimmte Zerlegung in Factoren und daran anschliessend eine bestimmte geometrische Interpretation verabredet haben, werden wir jetzt das Entsprechende für die Nebenformen (Nebenklassen) durchführen. Ebenso, wie die Theorie der Hauptgitterzahlen übereinstimmt mit der Theorie der gewöhnlichen ganzen algebraischen Zahlen des Körpers $\sqrt{d}$, so war-

den wir erkennen, daß die Gitter-
zahlen der Nebenklassen auf die
Idealtheorie des genannten quadra-
tischen Körpers führen.
Es handelt sich um eine beliebige
quadratische Form

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

der Stammdiscriminante $d = b^2 - 4ac$.
Wir zerlegen dieselbe nach
dem mehrfach genannten Schema

$$f = \xi\eta,$$
$$\xi = \rho\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2}\,y\right),$$
$$\eta = \frac{1}{\rho}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b-\sqrt{d}}{2}\,y\right),$$

in Linearfactoren. Die geometrische
Interpretation der „Gitterzahlen" ξ
und η geschieht in derselben
Weise, wie pag. 99 bis 101 im Falle
der Hauptformen. Wir setzen nämlich

$$\xi = u + (i)\,v$$
$$\eta = u - (i)\,v,$$

welche abkürzende Schreibweise
uns im Falle eines positiven oder

negativen d bez. die beiden Gleichungen $= u+v$ oder $= u+iv$ etc. vertreten soll, und deuten u und v als rechtwinklige Coordinaten in der Ebene. Die Gitterzahlen bedeuten dann, wie früher, im Falle eines positiven d die mit $\sqrt{2}$ multiplicirten Abstände der Gitterpunkte von den die Quadranten der u, v-Ebene halbirenden Geraden; im Falle eines negativen d dagegen bedeuten sie einfach die den Gitterpunkten in der Gaußischen Ebene zugeordneten complexen Zahlen.

In unserer Zerlegung sind die „Azimuthalfactoren" ρ und $\frac{1}{\rho}$ vorläufig noch unbestimmt. Ein erster Schritt zu ihrer Festlegung soll der folgende sein:

Wir betrachten neben der Formenclasse, welche die Form (a, b, c) enthält, diejenige, in welcher die Form $(a, -b, c)$ vorkommt. Zwei solche Classen nennen wir <u>conjugirte Klassen</u>. Eine Klasse, wel-

che mit ihrer conjugirten identisch ist, bezeichnen wir, wie schon Theil I pag. 162 hervorgehoben, als Anceps-classe.

Wir treffen nun die Verabredung, dass conjugirte Gitter mit conjugirten Factoren ϱ ausgestattet werden sollen, wobei wir zwei Factoren ϱ und ϱ' conjugirt nennen, wenn $\varrho\varrho' = 1$ ist. Hiernach lauten die zu zwei conjugirten Gittern gehörigen Gitterzahlen:

$$\xi = \varrho\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right),\quad \eta = \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b-\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right)$$

$$\xi' = \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{-b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y'\right),\quad \eta' = \varrho\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{-b-\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y'\right).$$

Lassen wir hierin x und y alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen, so erhalten wir die Minimalcoordinaten der Eckpunkte desjenigen Punktgitters, welchem die Form (a, b, c) angehört; lassen wir ebenso

x' und y' alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen, so erhalten wir die Minimalcoordinaten der Eckpunkte des conjugirten Gitters, dem die Form $(a, -b, c)$ angehört. Unter den beiden unendlichen Serien von Punkten x, y und x', y' wollen wir je zwei solche Punkte mit einander vergleichen, für welche $x' = x, y' = -y$ ist. Ein Blick auf die vorstehenden Formeln zeigt dann, dass für solche Punkte

$$\xi' = \eta \quad \text{und} \quad \eta' = \xi$$

wird. Unsere Verabredung über die Azimuthalfactoren conjugirter Formen bringt es also mit sich, dass, wenn die Form f die Zerlegung

$$f = \xi \cdot \eta$$

liefert, die conjugirte Form f' die Zerlegung

$$f' = \eta \xi$$

giebt. Diese Thatsache hat eine einfache geometrische Bedeutung. Berücksichtigen wir nämlich den Zusammenhang zwischen den Coordinaten ξ, η und u, v, so ergeben sich aus den Gleichungen $\xi' = \eta,\ \eta' = \xi$ die beiden folgenden Gleichungen:

$$u' \pm (i) v' = u \mp (i) v$$

d. h.

$$u' = u \ , \ v' = -v.$$

Der Punkt u', v' geht also aus dem Punkte u, v durch Spiegelung an der u-Axe hervor. Überhaupt können wir sagen:

<u>In Folge unserer obigen Verabredung liegen zwei conjugirte Gitter in Bezug auf die u-Axe spiegelbildlich zu einander.</u>

Wir mögen noch hinzufügen, daß sie auch <u>spiegelbildlich in Bezug auf die v-Axe</u> liegen. Der Grund hiervon ist der, daß jedes Gitter bei einer Drehung von $180°$ um 0 mit sich zur Deckung kommt. In Folge dessen giebt

es in unserem ersten Gitter ausser dem Punkte u, v auch stets einen Punkt −u, −v. In diesen wird aber der Punkt u, −v des zweiten Gitters durch eine Spiegelung an der v-Axe übergeführt.

Die Bestimmung der Azimuthalfactoren ist damit natürlich noch nicht abgeschlossen. Nach unseren bisherigen Verabredungen ist es verträglich, dass wir von zwei conjugirten Gittern das eine noch ganz willkürlich orientiren. Erst nachdem dieses geschehen, ist die Lage des zweiten Gitters festgelegt.

Nur in dem besonderen Falle der Anceps-gitter ist durch das Vorstehende die Orientirung bereits genauer fixirt, da sie die besondere Eigenschaft haben, mit ihren conjugirten Gittern identisch zu sein. (Theil I pg 163). Nach dem eben Auseinandergesetzten erhält man das richtig orientirte conjugirte Gitter, wenn man das orientirte

ursprüngliche Gitter an der u-Achse (oder v-Achse) spiegelt; ein richtig orientirtes Ancepsgitter muss daher so liegen, dass es durch Spiegelung an der u- (und v-) Achse in sich übergeht.

Wie wir nun früher gesehen haben (vergl. Theil I pg 232 ff) lässt sich das Fundamentalparallelogramm eines Ancepsgitters immer als Rechteck oder Rhombus wählen. Die Orientirung des Ancepsgitter ist deshalb so auszuführen, dass eine Seite des Rechtecks oder eine Diagonale des Rhombus in die Richtung der u- (oder v-) Achse fällt. Dies kann offenbar jedesmal nur auf höchstens 2 Weisen geschehen, da die Seiten des Rechtecks und die Diagonalen des Rhombus rechtwinklig auf einander stehen. Ein Ancepsgitter lässt deshalb nach den vorstehenden Festsetzungen nur noch eine 2-fache Möglichkeit der

Orientirung zu. Wir sprechen dies in folgendem Satze aus:

Unsere Verabredung über die conjugirten Gitter bedeutet für die Ancepsgitter speciell eine noch auf 2 Weisen herzustellende Orientirung derselben.

Wir werfen noch einen Blick auf die Gesammtfigur, soweit sie sich aus unseren bisherigen Betrachtungen ergeben hat. Sie besteht aus einem System von h Gittern, einem Hauptgitter und $h-1$ Nebengittern. Das Hauptgitter haben wir bereits in eindeutiger Weise festgelegt, die Ancepsgitter in zweideutiger Weise. Die übrigen Gitter sind einander paarweise zugeordnet und liegen spiegelbildlich in Bezug auf die Coordinatenaxen.

Jedes dieser Gitter liefert uns ein System von Gitterzahlen ξ, η. Die arithmetische Natur der Hauptgitterzahlen haben wir bereits oben besprochen:

es sind die ganzen Zahlen des Körpers Vd. Die arithmetische Natur der Nebengitterzahlen hängt offenbar von der Wahl des Factors ϱ ab. Wir wollen hierüber vorläufig nur soviel sagen, dass wir dieselben als Irrationalitäten fixiren werden, welche zu dem Körper Vd in einer einfachen Beziehung stehen.

Wir haben schon gelegentlich als Zielpunkt unserer Entwickelungen hingestellt, daß unsere h Gitter einen Organismus bilden und dass sie durch innere Beziehungen verbunden sind. Dies wird deutlich werden, wenn wir im Folgenden dazu übergehen, Rechnungsregeln festzusetzen, nach denen wir mit den Gitterzahlen ξ, η unserer h Gitter operiren wollen. Wir kommen hierdurch zu neuen fruchtbaren Fragestellungen und vertiefen unsere Auffassung der Gittertheorie.

Von der Composition der Gitter

Es handelt sich zunächst darum festzusetzen, was wir unter der Operation der Addition und Multiplication verstehen wollen. Wir sagen:

Man addirt Gitterpunkte, indem man ihre Minimalcoordinaten addirt.

Man multiplicirt Gitterpunkte, indem man ihre Minimalcoordinaten multiplicirt.

In Zeichen drücken wir dieses folgendermaassen aus. Gegeben seien zwei Gitterpunkte (ξ, η) und (ξ', η'). Nach den vorstehenden Regeln haben wir:

$$(\xi, \eta) + (\xi', \eta') = (\xi + \xi', \eta + \eta')$$
$$(\xi, \eta) \cdot (\xi', \eta') = (\xi \xi', \eta \eta').$$

Im Uebrigen setzen wir fest, dass wir nur solche Operationen vornehmen wollen, durch welche wir wieder auf Punkte unserer ursprünglichen

Figur geführt werden. Wir wollen also durch die vorzunehmenden Operationen keine neuen geometrischen Elemente bez. keine neuen Irrationalitäten einführen.

Was nun die Addition anbetrifft, so ergiebt sich: Sind zwei Punkte (ξ, η) u. (ξ', η') zu addiren, die demselben unserer h Gitter angehören, so liegt offenbar auch der Punkt $(\xi + \xi', \eta + \eta')$ in demselben Gitter, denn er wird durch geometrische Addition der Strecken von O nach (ξ, η) bez. nach (ξ', η') erhalten. Liegen dagegen die Punkte (ξ, η) u. (ξ', η') in verschiedenen Gittern, so wird ihre Summe im allgemeinen nicht in unserer Figur vorkommen (vorausgesetzt natürlich, dass die Azimuthalfactoren irgendwie fixirt sind) Wir werden daher im Folgenden die Addition auch nur auf Punkte desselben Gitters anwenden.

Ebenso wie von der Addition der Gitterpunkte, werden wir auch von der Addition ganzer Gitter reden,

indem wir festsetzen:

Man addirt zwei Gitter, indem man zu jedem Punkte des einen Gitters jeden des anderen addirt.

Auch die Addition der Gitter wird im allgemeinen nicht statthaft sein, wenn wir an unserer Beschränkung festhalten und überdies als Resultat der Addition wieder eine discrete Punktmenge erhalten wollen. Doch kann man z. B. zwei dem Hauptgitter eingelagerte Gitter addiren, was wir in unseren späteren Entwickelungen auch ausführen werden. Wir verweilen deshalb noch einen Augenblick dabei, um zu untersuchen, was über die Discriminante des durch Addition zweier Gitter G_1 und G_2, (die wir etwa dem Hauptgitter eingelagert denken) resultirenden Gitters G_3 auszusagen ist. Sind die Inhalte der Fundamentalparallelogramme von G_1 und G_2 resp. $m\sqrt{d}$ und $n\sqrt{d}$, so können wir den Inhalt des Fundamentalparallelogramms

von G_3 mit $r\sqrt{d}$ bezeichnen, unter m, n, r ganze rationale Zahlen verstanden. Es muß dann, wie wir behaupten r ein Theiler von m und n sein, weil die Gitter G_1 und G_2 in G_3 enthalten sein müssen. Ist nämlich ein Gitter I in einem Gitter II enthalten und haben die Fundamentalpunkte des ersteren in dem letzteren die Coordinaten $x_0\, y_0, x_1\, y_1$, so ist bekanntlich der Inhalt des Fundamentalparallelogramms von I $|x_0 y_1 - y_0 x_1|$ mal so gross als der von II, also ein ganzzahliges Multiplum desselben; Damit ist aber unsere Behauptung gerechtfertigt.

Ergiebiger ist für unsere Zwecke die Operation des Multiplicirens. Man darf, wie sich im Folgenden zeigen wird, zwei beliebige Gitterpunkte mit einander multipliciren; die Multiplication führt stets auf Gitterpunkte unserer Figur, vorausgesetzt, daß man die Azimuthalfactoren passend wählt.

Wir haben bereits festgesetzt, was wir unter der Multiplication zweier Gitterpunkte verstehen; wir wollen aber auch hier, ebenso wie bei der Addition, gleich die ganzen Gitter in Betracht ziehen und erklären, was man unter der Multiplication, oder besser gesagt, Composition zweier Gitter versteht.

Zwei Gitter G und G' componiren heisst: alle Punkte von G mit allen Punkten von G' multipliciren und die so entstehenden Punkte auf alle möglichen Weisen addiren.

Die Operation des Componirens ist also nur theilweise eine Multiplication, theilweise dagegen eine Addition, die neue Bezeichnung ist deshalb durchaus gerechtfertigt.

Ebenso wie man nicht zwei beliebige Gitter addiren kann, ist es auch nicht möglich, sie zu componiren, schon aus dem Grunde, weil die Operation des Componirens das Addiren von Gitterzahlen in sich schliesst. Wir wollen deshalb in

Folgenden nur von der Composition unserer h Stammgitter reden, die stets ausführbar ist.

Wir führen zunächst den Nachweis, dass sich durch Composition zweier Stammgitter wieder ein Stammgitter derselben Discriminante ergiebt.

Seien die zu componirenden Gitter:

$$\mathfrak{G} = \sqrt{a}\cdot x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}} \text{ und } \mathfrak{G}' = \sqrt{a'}\cdot x' + \frac{b'+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\, y'$$

und die entsprechenden Formen

$$f = ax^2 + bxy + cy^2 \text{ und } f' = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2.$$

Um unsere Behauptung zu rechtfertigen, präpariren wir uns die Gitter resp. Formen erst in geeigneter Weise, indem wir ihnen im Anschluss an Dirichlet einige Lage geben. Wir nennen nämlich zwei Formen einig, wenn die Coefficienten a und a' theilerfremd sind und die mittleren Coefficienten gleich. Die letztere Bedingung hat eine einfache geometrische Bedeutung. Ist nämlich $b = b'$, so muss auch

infolge der Gleichheit der Discriminanten $ac = a'c'$ sein. Bezeichnen wir nun die Parallelogrammwinkel, die zu unsern Formen gehören, mit ψ und ψ', so ist

$$\cos\psi + i\sin\psi = \frac{b+\sqrt{D}}{2\sqrt{ac}},$$

$$\cos\psi' + i\sin\psi' = \frac{b'+\sqrt{D}}{2\sqrt{a'c'}}$$ also

da $\frac{b+\sqrt{D}}{2\sqrt{ac}} = \frac{b'+\sqrt{D}}{2\sqrt{a'c'}}$, auch $\cos\psi + i\sin\psi = \cos\psi' + i\sin\psi'$ oder $\psi = \psi'$. Bei einiger Lage zweier Formen besitzen also die Fundamentalparallelogramme dieselben Winkel.

Wir zeigen jetzt: wenn zwei Stammformen vorliegen, so können wir sie stets durch zwei aequivalente einige Formen ersetzen.

1. Wir können bewirken, dass a und a' relativ prim werden. (Vergl. Dir.-Ded. pg 234, 4te Auflage)

2. Wir führen an f bez. f' die Transformation erster Ordnung aus

$$x = X + \lambda Y \qquad x' = X' + \mu Y'$$
$$y = \qquad Y \qquad y' = \qquad Y',$$

wodurch sich ergiebt:

$$f = aX^2 + (2a\lambda + b)XY + (a\lambda^2 + b\lambda + c)Y^2,$$
$$f' = a'X'^2 + (2a'\mu + b')X'Y' + (a'\mu^2 + b'\mu + c')Y'^2.$$

Hier können wir λ und μ so bestimmen, dass

$$2a\lambda + b = 2a'\mu + b' \text{ wird.}$$

Denn die Congruenz

$$2a\lambda \equiv b' - b \pmod{2a'}$$

ist immer lösbar, da a und a' relativ prim sind und $b' - b \equiv 0 \pmod{2}$ bei gleichem d.

Nennen wir nun den gemeinsamen Werth der mittleren Coefficienten der beiden Formen B

$$b = b' = B,$$

so folgt aus der Gleichheit der Dis-

criminanten $ac - a'c'$. Da nun a und a' als theilerfremd angenommen werden, so muss c durch a' und c' durch a theilbar sein. Wir setzen:

$$c = a'\mathfrak{C} \qquad c' = a\mathfrak{C}$$

Die beiden Formen sind dann

$$(a, \mathfrak{B}, a'\mathfrak{C}) \text{ und } (a', \mathfrak{B}, a\mathfrak{C})$$

und die entsprechenden Gitter:

$$G = \sqrt{a}\,x + \frac{\mathfrak{B} + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y \text{ und } G' = \sqrt{a'}\,x' + \frac{\mathfrak{B} + \sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\,y'.$$

Nunmehr können wir folgende Identität aufschreiben:

(1) $$\left(\sqrt{a}\,x + \frac{\mathfrak{B}+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right)\left(\sqrt{a'}\,x' + \frac{\mathfrak{B}+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\,y'\right) = \sqrt{aa'}\,(xx' - \mathfrak{C}yy') + \frac{\mathfrak{B}+\sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}\,(axy' + a'x'y + \mathfrak{B}yy')$$

$$= \sqrt{aa'}\,X + \frac{\mathfrak{B}+\sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}\,Y.$$

Aus dieser folgt: Wenn wir zwei Gitterzahlen aus den Gittern G und G' multipliciren, so erhalten wir eine Gitterzahl, die zu dem Stammgitter

$(aa', \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ gehört.

Wir haben damit einen Theil unserer Behauptung bereits bewiesen, aber auch nur erst einen Theil. Wir haben nämlich gezeigt, dass durch Composition von G und G' Zahlen eines Stammgitters

$$G'' = \sqrt{aa'}\,X + \frac{B'' + \sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}\,Y$$

erhalten werden, aber noch nicht bewiesen, dass auch alle Zahlen dieses Stammgitters sich durch die Composition ergeben. Um dies noch zu zeigen, brauchen wir offenbar nur zu beweisen, dass die Basiszahlen von G''

$$\sqrt{aa'} \text{ und } \frac{B'' + \sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}$$

bei der Composition resultiren. Von der ersten ist dies sofort evident; die zweite ergiebt sich auf folgende Weise. Bei der Composition erhalten wir offenbar die Gitterzahlen:

$$\frac{B'' + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\sqrt{a'} \text{ und } \frac{B'' + \sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\sqrt{a},$$

also auch alle Zahlen, die in der Formel enthalten sind:

$$\frac{B'+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\sqrt{a'}\,z_1 + \frac{B'+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\sqrt{a}\,z_2 \quad \text{oder}$$

$$\frac{B'+\sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}\,(a'z_1 + a z_2),$$

unter z_1 und z_2 ganze rationale Zahlen verstanden. Da nun a' und a theilerfremd sind, ist z_1 und z_2 stets so zu bestimmen, dass $a'z_1 + a z_2 = 1$ wird, d.h.

$$\frac{B'+\sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}$$

wird bei der Composition ebenfalls erhalten.

Nimmt man noch hinzu, was selbstverständlich ist, dass durch die Orientirung von G und G' auch die von G'' bestimmt ist, so können wir jetzt den Satz aussprechen:

<u>Zwei irgendwie orientirte Stammgitter ergeben componirt wieder ein ganz bestimmt orientirtes Stammgitter.</u>

Der vorstehende Satz ist der Fundamentalsatz der ganzen Theorie, auf dem, im Grunde genommen, alles folgende ruht. Bei seinem Beweise sind wir erst auf Umwegen zu der durch Composition resultirenden Form gelangt; es giebt aber auch eine Regel, wie man direct diese Form finden kann. Wir führen dieselbe hier ohne Beweis an, indem wir auf eine Abhandlung von Arndt, Crelle's Journal Bd. 56, 1857 verweisen. Es mögen die früheren Bezeichnungen beibehalten werden, es seien also die zu componirenden Gitter:

$$\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y \quad u. \quad \sqrt{a'}\,x' + \frac{b'+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\,y'$$

Die für das componirte Gitter charakteristischen Zahlen a'' und b'' werden dann auf folgende Weise bestimmt: Es wird

$$a'' = \frac{aa'}{\mu^2},$$

wo μ der grösste gemeinsame

Theiler von

a, a' und $\frac{b+b'}{2}$ ist. Weiter muss b'' den 3 Congruenzen genügen

$b'' \equiv b \pmod{\frac{2a}{\mu}}$. $b''\frac{a'}{\mu} \equiv b\frac{a'}{\mu} \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2}}$

$b'' \equiv b' \pmod{\frac{2a'}{\mu}}$ oder $b''\frac{a}{\mu} \equiv b'\frac{a}{\mu} \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2}}$

$\left(\frac{b+b'}{2\mu}\right)b'' \equiv \frac{bb'+d}{2\mu} \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2}}$ $b''\cdot\frac{b+b'}{2\mu} \equiv \frac{bb'+d}{2\mu} \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2}}$

Bezeichnet man nun mit r, s, t drei ganze rationale Zahlen, die der Bedingung genügen

$\frac{a'}{\mu}r + \frac{a}{\mu}s + \frac{b+b'}{2\mu}t = 1$ (solche giebt es stets, da $\frac{a}{\mu}$, $\frac{a'}{\mu}$ und $\frac{b+b'}{2\mu}$ theilerfremd sind), so erhält man, wenn man die 3 Congruenzen resp. mit r, s, t multiplicirt und addirt:

$$b'' \equiv b\frac{a'}{\mu}r + b'\frac{a}{\mu}s + \frac{bb'+d}{\mu}\cdot\frac{b+b'}{2\mu}t$$
$$\left(\text{mod. } \frac{2aa'}{\mu^2} = 2a''\right)$$

Damit ist aber b'' völlig festgelegt,

denn dasselbe ist offenbar nur mod $2a''$ bestimmt.

Die Compositionstheorie ist von Gauss in den Disquisitiones arithmeticae begründet worden. Gauss spricht natürlich nicht von den Gitterzahlen, sondern von den zugehörigen Formen. Zu der Composition der Formen kommen wir unmittelbar, indem wir in der Gleichung:

$$\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right)\left(\sqrt{a'}\,x' + \frac{b'+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\,y'\right) = \sqrt{a''}\,x'' + \frac{b''+\sqrt{d}}{2\sqrt{a''}}\,y''$$

rechts und links die Norm bilden. Die so entstehende Gleichung:

$$(ax^2+bxy+cy^2)(a'x'^2+b'x'y'+c'y'^2) = a''x''^2+b''x''y''+c''y''^2$$

können wir folgendermassen in Worte fassen:

Die rechts stehende Form zerfällt in das Product der beiden links stehenden, wenn wir für x'', y'' gewisse bilineare ganzzahlige Verbindungen

der x y und x' y' einsetzen (wie sie aus den Formeln (1) pg. 126 hervorgehen)

Wir können aber diese Darstellung der Theorie unmöglich für zweckmäßig halten. Offenbar dringen wir tiefer in den wahren Sachverhalt ein, wenn wir von den complexen Factoren als wenn wir von ihrem Product, den Formen, sprechen. Denn der einzelne complexe Factor enthält absoluten Betrag + Azimuth, während in dem correspondirenden Werthe der Form nur der absolute Betrag hervortritt.

Die Composition der Formen ist nur ein Corollar, nicht ein Aequivalent für die Composition der Gitterzahlen.

Man wird dies umsomehr zugeben, wenn man bedenkt, daß der Rückschluß von den Formen zu den Gittern nicht ohne weiteres möglich ist. Es kann sehr wohl sein, daß eine Stammform F', wenn man für ihre Variabeln ganzzahlige

bilineare Verbindungen zweier andern Variabelnpaare setzt, in das Product zweier Stammformen F und F' zerfällt, ohne dass darum ein zu F" gehöriges Gitter sich aus 2 passend orientirten zu F und F' gehörigen 2 Gittern componiren liesse.

Man kann die Frage aufwerfen, warum Gauss dennoch diese Form der Darstellung gewählt hat. Wir können natürlich darüber nichts Bestimmtes aussagen. Immerhin hat, wenn man die späteren Ausführungen von Gauss über die Gittervorstellung im Falle negativer Discriminanten (vergl. seine Anzeige des Buches von Seeber, ges. Werke Bd II) und seine Publicationsweise berücksichtigt, die Auffassung manches für sich, dass Gauss selbst im Besitz der Gitterzahlen sein mochte, daß er aber aus persönlichen Gründen die Composition der Gitterzahlen hinter der Composition der

quadratischen Formen und also die Zerlegung der gewöhnlichen Zahlen in complexe Factoren hinter der Darstellung dieser Zahlen durch die entsprechenden Formen verborgen hat. Übrigens geht die Idee, zerlegbare Formen (insbes. die binären quadratischen Formen) zu componiren, auf Lagrange zurück.

Ehe wir weiter in der Theorie fortschreiten, wird es zweckmässig sein, noch einige specielle Fälle unseres Fundamentalsatzes zu betrachten.

1. Sind die beiden zu componirenden Gitter mit dem Hauptgitter identisch, so muss das resultirende Gitter wieder das Hauptgitter sein; denn nach unserem Satze muss das Resultat der Composition wieder ein Stammgitter sein und überdies muss es das Product 1.1 enthalten, da 1 in den beiden zu componirenden Gittern vorkommt. Es muss infolgedessen mit dem Hauptgitter identisch sein. Wir

können also den Satz aussprechen:

Componirt man das Hauptgitter mit sich, so resultirt wieder das Hauptgitter.

Dieser Satz lautet in Bezug auf die Gitterzahlen:

Zwei Hauptzahlen mit einander multiplicirt geben wieder eine Hauptzahl.

Es lässt sich in dieser Fassung auch leicht rein rechnerisch nachweisen. Wir betrachten zunächst den Fall $d \equiv 0$ (mod. 4). Die beiden Hauptzahlen seien:

$$\xi = x + \frac{y\sqrt{d}}{2}, \quad \eta = x - \frac{y\sqrt{d}}{2},$$

$$\xi' = x' + \frac{y'\sqrt{d}}{2}, \quad \eta' = x' - \frac{y'\sqrt{d}}{2}.$$

Dann wird

$$\xi\xi' = \left(x + y\frac{\sqrt{d}}{2}\right)\left(x' + y\frac{\sqrt{d}}{2}\right) = \left(xx' + \frac{yy'd}{4}\right) + (xy' + yx')$$
$$= x'' + y''\frac{\sqrt{d}}{2}$$

$$\eta\eta' = \dots\dots\dots\dots\dots$$
$$= x'' - y''\frac{\sqrt{d}}{2}.$$

d. h. das Product ist wieder eine Hauptgitterzahl, da x'', y'' für alle ganzzahligen Werte von x, x', y, y' gemäss der Voraussetzung $d \equiv 0 \pmod{4}$ ebenfalls ganze Zahlen sind.

Ähnlich im Falle $d \equiv 1 \pmod{4}$. Sind die zu multiplicirenden Gitterzahlen:

$$\xi = x + y\frac{1+\sqrt{d}}{2}, \quad \eta = x + y\frac{1-\sqrt{d}}{2},$$

$$\xi' = x' + y'\frac{1+\sqrt{d}}{2}, \quad \eta' = x' + y'\frac{1-\sqrt{d}}{2},$$

so ergiebt sich durch Multiplication

$$\begin{aligned} \xi\xi' &= \left(x + y\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)\left(x' + y'\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right) = \\ &= \left[xx' + yy'\cdot\frac{d-1}{4}\right] + (xy' + x'y + yy')\cdot\frac{1+\sqrt{d}}{2} \\ &= x'' + y''\frac{1+\sqrt{d}}{2}, \end{aligned}$$

womit unsere Behauptung auch in diesem Falle gerechtfertigt ist.

Wir bemerken noch, dass unsere Behauptung vom Standpunkte der Körpertheorie ganz selbstverständlich ist. Wir haben nämlich nur gezeigt, dass das Product zweier ganzer Zah-

len des Körpers Vd wieder eine ganze Zahl desselben Körpers ist.

2. Ist von den beiden zu componirenden Gittern das eine das Hauptgitter H, das andere ein Nebengitter G, in beliebiger Orientirung, so ergiebt sich durch Composition beider wieder das Nebengitter G in derselben Orientirung. Denn das resultirende Gitter muss offenbar, da das Hauptgitter die 1 enthält, das Gitter G enthalten und infolgedessen mit ihm identisch sein, da beide dieselbe Discriminante haben.

Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

<u>Componirt man ein beliebiges Nebengitter mit dem Hauptgitter, so resultirt dasselbe Nebengitter, u. zw. gleichviel, wie wir uns den Azimuthalfactor ϱ bestimmt denken.</u>

Für die Gitterpunkte lautet der entsprechende Satz:

<u>Multiplicirt man einen Punkt</u>

eines Nebengitters mit einem Punkte des Hauptgitters, so erhält man einen Punkt desselben Nebengitters.

Um die Richtigkeit dieses Satzes rechnerisch nachzuweisen, betrachten wir zunächst wieder den Fall $d \equiv 0 \pmod{4}$. Wir haben dann:

$$\xi = x + y\frac{\sqrt{d}}{2}, \quad \eta = x - y\frac{\sqrt{d}}{2}$$

$$\xi' = \varrho\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y'\right), \quad \eta = \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{b-\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y'\right).$$

Das Product $\xi\xi'$ lässt sich nun schreiben:

$$\xi\xi' = \varrho\left(\sqrt{a}\,x'' + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y''\right),$$

wenn man

$$x'' = xx' - \frac{b}{2}\,yx' - c\,yy', \quad y'' = xy' + a\,yx' + \frac{b}{2}\,yy'$$

setzt, d.h. der Punkt $(\xi\xi', \eta\eta')$ gehört wieder demselben Nebengitter wie (ξ', η') an, denn x'' und y'' sind für alle ganzzahligen Werthe von x, x', y, y' selbst ganze Zahlen, da

im Falle $d \equiv 0 \pmod{4}$ auch die Congruenz $b \equiv 0 \pmod{2}$ besteht.

Bei $d \equiv 1 \pmod{4}$, wobei gleichzeitig $b \equiv 1 \pmod{2}$ ist, erhält man in analoger Weise:

$$\xi\xi' = \rho\left(\sqrt{a}\,x'' + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y''\right), \text{ wo}$$

$$x'' = xx' + \frac{1-b}{2}\,yx' - cyy' \qquad y'' = xy' + ayx + \frac{1+b}{2}\,yy$$

ist.

Ein specieller Fall unseres letzten Satzes ist uns von früher her wohl bekannt, wir meinen die <u>Aufsuchung der Automorphien eines Gitters mit Hülfe der Pell'schen Gleichung</u>. Wir bemerkten bereits, daß die Pell'sche Gleichung darauf hinauskommt, die jedesmalige Hauptform $= \underline{1}$ zu setzen, also $x^2 - \frac{d}{4}y^2 = 1$, bez. $x^2 + xy + \frac{1-d}{4}y^2 = 1$. Aus diesen x, y stellten wir uns die Grössen:

$$\xi, \eta = x \pm y\frac{\sqrt{d}}{2}, \text{ resp. } \xi, \eta = x + y\frac{1 \pm \sqrt{d}}{2}$$

her.

Wir nannten dieselben Einheiten, weil ihre Norm gleich 1 ist. Wir können dieselben nach unserer jetzigen Terminologie als Coordinaten der Einheitspunkte des Hauptgitters bezeichnen, nämlich derjenigen Gitterpunkte, welche den „Abstand" 1 von O besitzen.

Mit den Einheiten ξ, η multiplicirten wir früher die Gitterzahlen ξ', η' eines beliebigen zur Discriminante d gehörigen Gitters. Es zeigte sich, daß dabei ein dem ursprünglichen congruentes Gitter entstand, daß wir also eine Automorphie des Gitters erhielten. Dieser Umstand erklärt sich jetzt einfach aus dem eben bewiesenen Satze.

Zunächst ist nach unserem Satze klar, das der Punkt $(\xi, \eta) \cdot (\xi', \eta')$ wieder dem Gitter (ξ', η') angehören muß. Während aber im allgemeinen durch Multiplication eines Punktes (ξ, η) des Hauptgitters mit den sämmtlichen

Punkten (ξ',η') ein dem Gitter $\xi'\eta'$ eingelagertes Gitter entsteht, dessen einzelne Maschen sich aus mehreren Maschen des ursprünglichen Gitters zusammensetzen, bringt es die Wahl des Punktes (ξ,η) in unserem Falle mit sich, daß wir ein dem ursprünglichen congruentes Gitter erhalten. In der That wird wegen $N(\xi)=1$ auch $N(\xi\xi')=N(\xi')$. Der Abstand der Gitterpunkte von O wird also durch die Multiplication des Gitters mit dem Punkte (ξ,η) nicht geändert. Das neue Gitter wird daher dem alten congruent sein, so daß sich in der That eine Automorphie ergiebt. Ist (ξ,η) kein Einheitspunkt, so wird das neue Gitter mit dem alten nur ähnlich sein.

Wir betrachten endlich den Fall conjugirter Stammgitter, bezüglich derer wir den Satz aussprechen:

Zahlen aus conjugirten Gittern geben multiplicirt Hauptzahlen.

(vorausgesetzt, dass wir an der früher verabredeten Orientirung conjugirter Gitter festhalten)

Sind die Gitterzahlen aus den richtig orientirten conjugirten Gittern:

$$\xi = \rho\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right),\quad \eta = \frac{1}{\rho}(\cdots\;),$$

$$\xi' = \frac{1}{\rho}\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{-b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y'\right),\quad \eta' = \rho(\cdots\cdots),$$

so ergiebt sich

$$\xi\xi' = \left(axx' - \frac{b}{2}xy' + \frac{b}{2}yx' - cyy'\right) + \frac{\sqrt{d}}{2}(xy' - yx')$$

$$= \left[axx' - \frac{b+1}{2}xy' + \frac{b-1}{2}yx' - cyy'\right] + \frac{1+\sqrt{d}}{2}(xy' + y\text{[illegible]}$$

Aus dieser Doppelgleichung folgt die Richtigkeit unseres Satzes sowohl für $d \equiv 0 \pmod{4}$ (erste Zeile) wie auch $d \equiv 1 \pmod{4}$ (zweite Zeile), da die Klammergrössen stets ganze Zahlen sind.

Für die Composition conjugirter Stammgitter folgern wir noch leicht den Satz:

<u>Conjugirte Stammgitter geben componirt das Hauptstammgitter.</u>

Denn das resultirende Gitter muss

ein Stammgitter sein und enthält überdies nach dem eben Bewiesenen Hauptzahlen, es muss also das Hauptstammgitter sein.

19. VI. 96. Die von uns begründete Composition der Gitter fassen wir in die symbolische Gleichung zusammen:

$$G \cdot G' = G''.$$

Dieselbe zeigt, dass unsere h Gitter

$$G, G', G'', \ldots G^{(h-1)}$$

ein <u>geschlossenes Ganzes</u> bilden und dass wir bei der Composition immer wieder zu einem unserer h Elemente kommen. Die vorstehende Gleichung ist auch umkehrbar in dem Sinne dass wir zu G' und G'' in eindeutiger Weise ein zugehöriges G finden können. Dabei berücksichtigen wir, dass bei der Composition das <u>Hauptgitter</u> G_0 die <u>Rolle der Einheit</u> spielt und dass <u>zwei conjugirte Gitter</u> G und $\bar{G}$ dementsprechend als <u>inverse Elemente</u> angesehen

werden müssen. Wir können nämlich den Satz von pg.   in die symbolische Gleichung fassen

$$G G_0 = G \text{ oder } G_0 = 1.$$

und den Satz von pg.   in die folgende Gleichung:

$$G \bar{G} = G_0 = 1.$$

In Folge dessen erhalten wir aus der Compositionsgleichung $G G' = G''$, in dem wir rechts und links mit $\bar{G}'$ componiren:

$$G'' \bar{G}' = G G' \cdot \bar{G}' = G G_0 = G.$$

Das Gitter G ist also in der That eindeutig durch G' und G'' bestimt. Endlich berücksichtigen wir, daſs die Operation der Multiplication eine commutative Operation ist, so daſs

$$G G' = G' G$$

wird. Alle diese Thatsachen fassen wir in die einfache Aussage zusammen:

Unsere h Gitter bilden eine

Gruppe vertauschbarer Elemente.

Die Eigenschaften dieser Gruppe sind u.a. studirt worden von

Schering: Die Fundamentalclassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen, Göttinger Abhandlungen Bd. 14.

und von

Frobenius und Stickelberger: Ueber Gruppen vertauschbarer Elemente, Crelle Bd 86, 1878.

Nebenbei bemerken Sie an dem Titel dieser Abhandlungen die Fortschritte, welche der Gruppenbegriff in den letzten Decennien gemacht hat. Währnd in der früheren Arbeit die specielle Beschaffenheit der Elemente, aus denen die Gruppe besteht, betont wird, abstrahirt die zweite Arbeit hiervon gänzlich und hebt nur ihre Grupppeneigenschaft hervor, wie solches der Allgemeinheit des Gruppenbegriffes in der That besser entspricht.

Wir führen hier eine Reihe einfacher

Sätze an, zu denen die genannten Autoren gelangen; die übrigens ganz einfachen Beweise sollen der Kürze halber fortgelassen werden.

1. Wir greifen irgend eines der h Gitter heraus und componiren dasselbe mit sich selbst. Dabei muß wegen der Endlichkeit der Gruppenelemente einmal, sagen wir nach k-maliger Composition, die Einheit auftreten. Wir bilden also:

$$\mathcal{G}, \mathcal{G}^2, \mathcal{G}^3, \ldots \mathcal{G}^k = 1.$$

Unser erster Satz lautet nun, daß der „Grad" k nothwendig ein Theiler von h sein muß.

2. Es könnte sein, daß zufälliger Weise k = h wird. Ein solches Gitter nennen wir ein „erzeugendes Gitter" und bezeichnen dasselbe mit Γ. Wir können dann die ganze Reihe der Gitter in der Form

$$\Gamma, \Gamma^2, \Gamma^3 \ldots \Gamma^h = 1$$

anschreiben.

3. Wenn $k \neq h$ ist, so wird es jedenfalls ein Gitter geben, für welches k einen <u>maximalen Werth</u> hat. Wir schreiben dann zunächst die folgenden k Gitter auf:

$$\Gamma, \Gamma^2, .. \Gamma^k = 1.$$

Darauf suchen wir unter den übrigen Gittern dasjenige (Γ_1) auf, dem der grösste hier noch vorkommende Grad (k_1) zukommt. Wir können dann k_1 Gittern die Form geben:

$$\Gamma_1, \Gamma_1^2, .. \Gamma_1^{k_1} = 1.$$

Durch Combination dieser k_1 mit den früheren k Gittern ergeben sich $k_1 k, \delta$ Gitter

$$\Gamma^{\alpha} \Gamma_1^{\alpha_1} \begin{cases} \alpha \equiv 0, 1, .. k-1 \pmod{k} \\ \alpha_1 \equiv 0, 1, .. k_1-1 \pmod{k_1} \end{cases}.$$

4. Fahren wir so fort, so erhalten wir eine abbrechende Reihe von Gittern

$$\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2 \dots$$

bez. vom Grade

$k, k_1, k_2.$

Sämmtliche h Gitter stellen sich dann in der Gestalt dar:

$$\Gamma^{\alpha}\Gamma_1^{\alpha_1}\Gamma_2^{\alpha_2}\dots \begin{Bmatrix} \alpha \equiv 0, 1, \dots k-1 \pmod{k} \\ \alpha_1 \equiv 0, 1, \dots k_1-1 \pmod{k_1} \\ \alpha_2 \equiv 0, 1 \dots k_2-1 \pmod{k_2} \end{Bmatrix}$$

Dabei zeigt sich, dass die Zahlen k nicht nur der Ungleichung genügen:

$$h \geqq k \geqq k_1 \geqq k_2 \geqq \dots$$

sondern es ist auch in dieser Reihe jede Zahl ein Theiler der vorhergehenden.

5. Sind uns zwei Gitter in der Darstellung gegeben

$$\Gamma^{\alpha}\;\Gamma_1^{\alpha_1}\;\Gamma_2^{\alpha_2}\;\dots$$

$$\Gamma^{\beta}\;\Gamma_1^{\beta}\;\Gamma_2^{\beta_2}\;\dots,$$

so wird (wegen der Vertauschbarkeit der Elemente) das durch Composition entstehende Gitter ersichtlich dieses sein:

$$\Gamma^{\alpha+\beta}\ \Gamma_1^{\alpha_1+\beta_1}\ \Gamma_2^{\alpha_2+\beta_2}\ \ldots$$

Hier wird man die Exponenten $\alpha+\beta, \alpha_1+\beta_1$ ... natürlich immer mod k, bez. mod k_1 ... auf ihre kleinsten Reste reducieren.

Die Composition der Gitter verwandelt sich in eine Addition der Exponenten α und β.

6. Sollen die beiden vorhergenannten Gitter insbesondere conjugirt sein, so muss bei der Composition die Einheit entstehen. Es muss also allgemein sein:

$$\alpha_i \equiv -\beta_i \pmod{k_i}$$

7. Dementsprechend lassen sich die Ancepsgitter leicht charakterisiren als solche Gitter, deren Quadrat die Einheit ist. Soll also

$$\Gamma^{\alpha}\ \Gamma_1^{\alpha_1}\ \Gamma_2^{\alpha_2}\ \ldots$$

speciell ein Ancepsgitter vorstellen, so müssen die Congruenzen erfüllt sein:

$$2\alpha \equiv 0 \pmod{k}$$
$$2\alpha_1 \equiv 0 \pmod{k_1}$$
$$- \; - \; - \; - \; -$$

Wir fragen nach der Zahl der Ancepsgitter. Diese hängt offenbar davon ab, wie viele der Zahlen k_i gerade sind. Ist k_i ungerade, so hat die Congruenz

$$2\alpha_i \equiv 0 \pmod{k_i}$$

nur die eine Lösung $\alpha_i = 0$. Ist aber k_i gerade, so giebt es zwei mod k_i incongruente Lösungen, nämlich

$$\alpha_i = 0 \text{ und } \alpha_i = \frac{k_i}{2}.$$

Hiernach beträgt die Zahl der Ancepsgitter, wenn τ die Anzahl der in der Reihe $k, k_1, k_2 \ldots$ vorkommenden geraden Zahlen ist, einfach 2^τ.

Wir erläutern diese Dinge durch einige Zahlenbeispiele, welche wir aus den Tabellen von Cayley (vergl. ges. Werke Bd V pag. 141 ff.)

zusammenstellen. Wir wählen dabei Gitter von negativer Discriminante aus, weil uns diese wegen der Anwendung auf die Theorie der elliptischen Functionen besonders wichtig sind. Es sei zunächst

1. $d = -356 = -4 \cdot 89.$

Die Classenanzahl h ergiebt sich aus der Anzahl der reducirten Formen und diese aus der Anzahl der Zahlentripel $a, b, c,$ für welche

$$|b| \leqq a \leqq c\ , \quad -356 = b^2 - 4ac.$$

Man findet die folgenden reducirten Formen:

a	b	c
1	0	89
2	2	45
3	± 2	30
5	± 2	18
6	± 2	15
7	± 6	14
9	± 2	10

Die beiden ersten Formen charakteri=

siren sich als Ancepsformen, speciell die erste als Hauptform. Die übrigen sind paarweise als conjugirte Formen zusammengeordnet. Die Zahl der reducirten Formen und daher die Classenanzahl beträgt 12.

Bei der Composition wollen wir mit der Form

$$\Gamma = (3, \pm 2, 30)$$

beginnen und die successiven Potenzen derselben bilden. Nach unserer obigen Regel für die Composition der zu den Formen (a, b, c) und (a', b', c') gehörigen Gitterzahlen, haben wir den grössten gemeinsamen Theiler μ der Zahlen

$$a = 3 \;, \; a' = 3 \;, \; \frac{b + b'}{2} = 2$$

zu suchen, welcher gleich 1 ist. Es wird also

$$\alpha = 3, \; \alpha' = 3 \;, \; \beta = 2 .$$

Daraus folgt $a'' = 9$. Zur Berechnung von b'' haben wir die Congruenzen

$$b'' \equiv 2 \pmod 6$$
$$b'' \equiv 2 \pmod 6$$
$$4b'' \equiv 4(1-89) \pmod{36}$$ oder
$$b'' \equiv -88 \pmod 9$$ oder endlich
$$b'' \equiv +2 \pmod 9.$$

Die gemeinsame Lösung dieser drei Congruenzen ist offenbar

$b'' = 2$ oder allgemeiner $b'' = 2 + 18m$.

Die dem Gitter T^2 entsprechende Form wird also

$$(9, 2, 10),$$

welche sich zufälliger Weise unter unsern reducirten Formen vorfindet.

Wir gehen darauf zu T^3 und bilden zu dem Zwecke:

$$(9, 2, 10)\ (3, 2, 30).$$

Jetzt haben wir

$$a = 9,\ a' = 3,\ \frac{b+b'}{2} = 2,$$

also $\mu = 1$ und

$$\alpha = 9,\ \alpha' = 3,\ \beta = 2,\ a'' = 27.$$

Die Congruenzen zur Bestimmung von b'' sind

$b' \equiv 2 \pmod 6$
$b'' \equiv 2 \pmod{18}$
$b'' \equiv 20 \pmod{27}$,
woraus wir schliessen
$b'' = 20$ bez. $b'' = 20 + m.54$.
Die dem Gitter Γ^3 entsprechende Form wird also

$$(27, 20, 7) = 27x^2 + 20xy + 7y^2$$

Diese Form ist noch nicht reducirt. Sie wird es aber mittelst der unimodularen Substitution

$$x = -y'$$
$$y = x' + y'.$$

Wir haben nämlich

$$27x^2 + 20xy + 7y^2 = 7x'^2 + (-20+14)x'y' + (27-20+7)y'^2 = (7, -6, 14).$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so erkennen wir, dass wir successive unsere 12 Formen aus unserem Ausgangsgitter Γ ableiten können. Es liegt hier also der pag. 146 sub 2 hervorgehobene besondere Fall vor. Die Reihenfolge,

in der unsere 12 reducirten Formen erhalten werden, ist diese

$\Gamma^0 = (1, 0, 89)$	$\Gamma^6 = (2, 2, 45)$
$\Gamma^1 = (3, 2, 30)$	$\Gamma^7 = (6, 2, 15)$
$\Gamma^2 = (9, 2, 10)$	$\Gamma^8 = (5, -2, 18)$
$\Gamma^3 = (7, -6, 14)$	$\Gamma^9 = (7, 6, 14)$
$\Gamma^4 = (5, 2, 18)$	$\Gamma^{10} = (9, -2, 10)$
$\Gamma^5 = (6, -2, 15)$	$\Gamma^{11} = (3, -2, 30)$

Übrigens bewähren sich noch die sub 7 und 8 angegebenen Regeln über die conjugirten- und die Ancepsgitter. In der vorstehenden Reihe sind je zwei solche Gitter Γ^α und Γ^β conjugirt, für welche $\alpha + \beta = h = 12$, während die Gitter Γ^0 und Γ^6 Anceps-Gitter sind, da ihre Exponenten der Congruenz $2\alpha \equiv 0 \pmod{12}$ genügen. Die Zahl der Ancepsgitter beträgt, wie es sein muß, $2^\tau = 2$, indem die in unserem Fall allein vorhandene Zahl $k = 12$ eine gerade Zahl ist.

Als zweites Beispiel wählen wir

2.) $d = -972 = -4 \cdot 243.$

Die Classenanzahl ist hier $h = 9$. Die vorhandenen neun reducirten Formen schreiben wir sogleich nach ihrer Erzeugungsweise in die Tabelle zusammen.

$\Gamma^0 = (1, 0, 243)$; $\Gamma^0 \Gamma_1^1 = (4, 2, 61)$; $\Gamma^0 \Gamma_1^2 = (4, -2, 61)$;
$\Gamma^1 = (7, 6, 36)$; $\Gamma^1 \Gamma_1^1 = (13, -4, 19)$; $\Gamma^1 \Gamma_1^2 = (9, -6, 28)$;
$\Gamma^2 = (7, -6, 36)$; $\Gamma^2 \Gamma_1^1 = (9, 6, 28)$; $\Gamma^2 \Gamma_1^2 = (13, 4, 19)$.

Hier haben wir zwei erzeugende Gitter Γ und Γ_1 mit den Exponenten $k = 3$ und $k_1 = 3$. Wiederum sind diejenigen Gitter paarweise conjugirt, für welche

$\alpha + \beta \equiv 0 \pmod 3$ und gleichzeitig
$\alpha_1 + \beta_1 \equiv 0 \pmod 3$

ist. Da die Anzahl τ der in der Reihe $k = 3$, $k_1 = 3$ vorkommenden geraden Zahlen 0 beträgt, so wird die Anzahl der Ancepsgitter $2^0 = 1$. In der That giebt es hier keine andere An-

cepsform als die Hauptform.

25. VI. 96. Wir benutzen jetzt die Gleichung

$$G = T^{\alpha} T_1^{\alpha_1} \dots$$

um die Orientirung unserer h Gitter G definitiv festzulegen. Bisher haben wir nur die Lage des Hauptgitters und die gegenseitige Lage zweier conjugirter Gitter bestimmt. Das Entsprechende soll jetzt allgemein für jedes Gitter geschehen. U. zw. wollen wir es so einrichten, daß der folgende Satz Gültigkeit bekommt:

Zwei Punkte aus orientirten Gittern geben multiplicirt wieder einen Gitterpunkt in richtiger Orientirung.

Wir beginnen mit dem erzeugenden Gitter T. Wenn wir dieses k-mal mit sich selbst componiren, so ergiebt sich, wie wir sahen, das Hauptgitter. Dem soeben genannten Princip entsprechend müssen wir also T so orientiren, daß

Γ^k das Hauptgitter in der früher verabredeten Orientirung ergiebt. Ebenso verfahren wir mit $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ Alle übrigen Gitter aber orientiren wir in der Weise, wie sie aus $\Gamma, \Gamma_1, \ldots$ nach unserer obigen Compositionsformel entstehen. — Dann ist unsere Absicht vollkommen erreicht. In der That entsteht durch Multiplication aus zwei Punkten der Gitter $\Gamma^{\alpha} \Gamma_1^{\alpha_1} \ldots$ bez. $\Gamma^{\beta} \Gamma_1^{\beta_1} \ldots$ ein Punkt aus dem Gitter $\Gamma^{\alpha+\beta} \Gamma_1^{\alpha_1+\beta_1} \ldots$, letzteres in derjenigen Lage genommen, die wir diesem Gitter ohnehin zugewiesen haben.

Wir mögen noch bemerken, daß unsere frühere Verabredung über die conjugirte Lage conjugirter Gitter in unserer jetzigen Orientirungsregel enthalten ist. Da nämlich zwei conjugirte Gitter die Form haben $\Gamma^{\alpha} \Gamma_1^{\alpha_1} \ldots$ bez. $\Gamma^{-\alpha} \Gamma_1^{-\alpha_1} \ldots$, so setzen sich ihre Azimuthalfactoren aus lauter reciproken Bestand-

theilen zusammen. Sie liegen also nach unserer jetzigen Regel von selbst symmetrisch gegen die u- und v-Axe.

Die so erhaltene Figur, in der unsere h Gitter in bestimmter Weise gelagert sind, nennen wir die Normalfigur; sie liegt allen späteren Betrachtungen, in's Besondere der Theorie der singulären elliptischen Gebilde zu Grunde.

Auf die Herstellung der Normalfigur im Einzelnen müssen wir noch näher eingehen. Wir müssen nämlich angeben, wie wir es erreichen, dass $\Gamma^k, \Gamma^k, \ldots$ gerade mit dem Hauptgitter zusammenfällt. Wir wollen dabei der Deutlichkeit wegen den Fall eines positiven und negativen d getrennt behandeln und mit den negativen Werthen von d beginnen.

1. $d < 0$. Wir nehmen die Fälle $d = -3$ und $d = -4$ vorweg. Die Gitterzahlen ξ, η des Hauptgitters

haben die Form

$d = -3 : x \pm \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} y.$

$d = -4 : x \pm i y.$

Es sind dieses die allereinfachsten Beispiele von ganzen algebraischen Zahlen eines quadratischen Zahlkörpers. Die Bedingungsgleichungen der reducirten Formen zeigen nun sofort, dass in diesen Fällen die Classenanzahl $h = 1$ wird. Es sind also keine Nebengitter vorhanden; die ganze Normalfigur reducirt sich auf die Figur des Hauptgitters. Umgekehrt also dürfen wir unsere Normalfigur für $|d| > 4$ als die naturgemässe Verallgemeinerung der einfachen Gitterfiguren im Falle $d = -3$ und $d = -4$ ansehen.

Wir überlegen nun, wie im Falle $|d| > 4$ die Orientirung der Nebengitter im Einzelnen vorzunehmen ist. Es handelt sich dabei um die Bestimmung der

(reellen) Grösse φ in dem Ausdrucke für eine allgemeine Gitterzahl von Γ:

$$e^{i\varphi}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right),$$

oder auch in dem specielleren Ausdrucke

$$e^{i\varphi}\sqrt{a},$$

welcher eine Basiszahl des Gitters Γ bedeutet.

Componiren wir das Gitter Γ k-mal mit sich selbst, so entsteht aus dem letzgenannten Punkte:

$$e^{ki\varphi}\sqrt{a}^{\,k}.$$

Der zugehörige Gitterpunkt gehört aber dem Hauptgitter an und findet sich in diesem etwa unter dem Azimuthe Φ vor. Dabei haben wir die Automorphien des Gitters Γ einerseits, des Hauptgitters andrerseits zu beachten. Wenn, wie wir voraussetzen, $d < -4$ ist, so besteht die ein-

zige vorhandene Automorphie in einer Drehung des Gitters durch den Winkel π. Es findet sich daher der fragliche Punkt $e^{ki\varphi}\sqrt{a}^k$ in dem Hauptgitter ausser unter dem Azimuthe ϕ nur noch unter dem Azimuthe $\phi + \mu\pi$ vor, wo μ irgend eine ganze Zahl bedeutet. Soll also $e^{ki\varphi}\sqrt{a}^k$ direct in einen correspondierenden Punkt des Hauptgitters übergehen, so muss

$$k\varphi = \phi + \mu\pi$$

oder

$$\varphi = \frac{\phi + \mu\pi}{k}$$

gewählt werden. Andrerseits können wir uns darauf beschränken, μ die zu k incongruenten Werthe $\mu = 0, 1, 2, .. k-1$ durchlaufen zu lassen, um alle möglichen mit unserer obigen Festsetzung verträglichen Orientirungen von Γ zu erhalten. Denn auch das

Gitter Γ besitzt doch die vorher genannte Automorphie, so dass zwei Orientirungen, welche sich nur um ein Vielfaches von π unterscheiden, als identisch gelten müssen. In Folge dessen bekommen wir gerade k zulässige Orientirungen des Gitters Γ. Von diesen greifen wir irgend eine heraus und legen sie unserer Normalfigur zu Grunde.

Dasselbe machen wir mit dem erzeugenden Gitter Γ_1. Dieses geht durch k_1 - malige Composition in das Hauptgitter über. Demnach müssen wir das Azimuth φ_1 dieses Gitters so wählen, dass

$$k_1 \varphi_1 = \Phi_1 + \mu_1 \pi$$

oder

$$\varphi_1 = \frac{\Phi_1 + \mu_1 \pi}{k_1}$$

wird. Für Γ_1 ergeben sich also k_1 zulässige Lagen. Ebenso für Γ_2 k_2 Lagen etc.

Im Ganzen ergeben sich so

$k\ k_1\ k_2 \ldots = h$ verschiedene Möglichkeiten, unsere Normalfigur zu entwerfen. Indem wir bei der Orientirung der Gitter $\Gamma, \Gamma_1, \ldots$ den ganzen Zahlen μ willkürliche, aber bestimmte Werthe beilegen, greifen wir unter den h Möglichkeiten eine bestimmte, aber beliebige heraus und halten an dieser für die Folge fest.

Die nunmehr definirten Nebengitterzahlen mögen wir noch arithmetisch charakterisiren. Sie gehören nicht direkt dem Körper $\sqrt{d}$ an, wohl aber je einem Nebenkörper desselben, welcher dadurch entsteht, daſs wir zu $\sqrt{d}$ bez. die Irrationalitäten

$$\sqrt{a}\ e^{i\frac{\varphi+\mu\pi}{k}},\ \sqrt{a_1}\ e^{i\frac{\varphi_1+\mu\pi}{k_1}},\ \ldots$$

adjungiren. In der That lassen sich alle Gitterzahlen von Γ rational durch $\sqrt{d}$ und $\sqrt{a}\ e^{i\frac{\varphi+\mu\pi}{k}}$, alle Gitterzahlen von Γ_2 durch $\sqrt{d}$ und $\sqrt{a_1}\ e^{i\frac{\varphi_1+\mu\pi}{k}}$ etc. auf-

bauen.

Überdies sind alle Nebengitterzahlen algebraische ganze Zahlen. Beispielsweise liefert jeder Punkt von Γ, in die k^{te} Potenz erhoben, einen Punkt des Hauptgitters. Da nun die Zahlen des Hauptgitters einer quadratischen Gleichung genügen, deren erster Coefficient 1 ist, so befriedigen die Zahlen von Γ eine Gleichung $2k^{ten}$ Grades deren erster Coefficient gleichfalls die Einheit ist.

Wir fügen noch einen Hülfssatz hinzu, der uns später nützlich sein wird. Wir behaupten:

Ein Ausdruck von der Form der Nebengitterzahlen, in welchem $x = x_0$ und $y = y_0$ als rational vorausgesetzt werden, kann nur dann eine ganze algebraische Zahl sein, wenn x_0 und y_0 ganze Zahlen sind.

Zum Beweise denken wir uns den fraglichen Ausdruck

$$1)\quad \varrho\left(\sqrt{a}\,x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y_0\right)$$

mit den Zahlen des zu dem Gitter (a, b, c) conjugirten Gitters multiplicirt, d. h. mit

$$2)\quad \frac{1}{\varsigma}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{-b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right),$$

wo x und y beliebige ganze rationale Zahlen bedeuten sollen. Bei der Multiplication ergiebt sich ein Ausdruck von der Form der Hauptzahlen, nämlich, je nachdem $d \equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod 4$ ist:

$$3)\quad X + Y\frac{\sqrt{d}}{2} \quad \text{bez} \quad X + Y\frac{1+\sqrt{d}}{2};$$

hierbei wird nach pg. 142.

$$4)\qquad Y = X y_0 + y x_0\,.$$

Nun setzen wir voraus, daß 1) eine ganze algebraische Zahl ist. Durch Multiplication mit dem Ausdrucke 2), welcher eo ipso eine ganze algebraische Zahl darstellt, entsteht wieder eine ganze algebraische Zahl. Die Ausdrücke 3) sind daher ganze Zahlen des Körpers $\sqrt{d}$. Infolgedessen müssen X und

y ganze rationale Zahlen sein u. zw. für alle ganzzahligen Werthe von x und y. Daraufhin zeigt aber die Gleichung 4), dass auch x_0 und y_0 ganze Zahlen sein müssen. Setzen wir nämlich etwa $x=1, y=0$ oder $x=0, y=1$, so sehen wir, dass y_0 bez. x_0 einen ganzzahligen Werth besitzen.

2. $d>0$. Bei positiver Discriminante liegen die Dinge ganz ähnlich, nur drücken sie sich hier etwas anders aus. Der Unterschied liegt darin, dass die Azimuthalfactoren ρ hier reelle Zahlen vorstellen und dass jetzt stets nicht-triviale Automorphien vorhanden sind. Letztere ergeben sich wie wir wissen aus der kleinsten Lösung (t_0, u_0) der Pell'schen Gleichung in der Form

$$\left(\frac{t_0+u_0\sqrt{d}}{2}\right)^\mu.$$

Da die Automorphien nur von der Grösse d abhängen, so sind

sie dem Hauptgitter und den Nebengittern gemeinsam. Geometrisch konnten wir sie als Pseudodrehungen um beliebige Multipla des Pell'schen Winkels

$$i \log\left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}\right)$$

auffassen, welche unsere Gitter mit sich zur Deckung bringen. Der Maass-bestimmung liegt dabei, vermöge unserer obigen geometrischen Verabredungen, das Linienpaar $u^2 - v^2 = 0$ zu Grunde.

Bei der Frage nach der richtigen Orientirung von T handelt es sich nun um die Bestimmung der reellen und, wie wir hinzufügen können, auch positiven Grösse ρ in dem allgemeinen Ausdrucke der Gitterzahlen von T:

$$\rho\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right).$$

(Ein Vorzeichenwechsel von ρ würde die Lage des Gitters nicht ändern, sondern nur bedeuten, dass wir in einem anderen

Sector der Linien $u \pm v = 0$ operiren.)

Im Besonderen genügt es, den Basispunkt $x = 1, y = 0$, d. h. den Punkt

$$\varrho \sqrt{a}$$

richtig zu legen, woraus dann die richtige Orientirung des ganzen Gitters von selbst folgt.

Durch k-malige Composition von Γ ergiebt sich das Hauptgitter. Möge nun ein Punkt des Hauptgitters, welcher hierbei dem durch Potenzirung aus $\varrho \sqrt{a}$ entstehenden Punkte ($\varrho^k \sqrt{a}^k$) entspricht, unter dem Pseudo-Azimuthe P orientirt sein (wo wir P wieder als positive Zahl voraussetzen). Es giebt dann noch unendlich viele andere Punkte des Hauptgitters, welche demselben Punkte entsprechen und deren Pseudo-Azimuth durch die Formel

$$P\left(\frac{t_0 + u_0 \sqrt{d}}{2}\right)^{\mu}$$

bestimmt sind. Die Einheit $\frac{t_0 + u_0 \sqrt{d}}{2}$ setzen wir hier gleichfalls als posi-

tive Grösse voraus. Soll nun bei der Composition das Gitter Γ direct in das Hauptgitter übergehen, so müssen wir haben

$$\varrho^{k} = P\left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}\right)^{\mu}$$

oder

$$\varrho = P^{\frac{1}{k}}\left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}\right)^{\mu/k}.$$

Hier durchläuft μ alle ganzen Zahlen. Es genügt aber wieder, nur k modulo k incongruente Werthe von μ zu berücksichtigen etwa die Werthe $\mu = 0, 1, \ldots k-1$; in der That geben zwei modulo k congruente Werthe von μ zu zwei Werthen von ϱ Anlass, welche sich lediglich um eine ganze Potenz von $\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}$ unterscheiden; die entsprechenden Gitter Γ sind aber ohne weiteres identisch. Der an sich mehrdeutige Ausdruck $P^{1/k}$ ist durch unsere Verabredung, nach der ϱ eine reelle und posi-

tive Zahl sein soll, eindeutig bestimmt. Hiernach liefert unsere Formel wiederum <u>k zulässige Orientirungen des Gitters Γ.</u>

Ebenso finden wir natürlich für die Gitter $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots$ $k_1, k_2 \ldots$ mögliche Lagen. <u>Unsere Normalfigur lässt sich daher auch im Falle $d > 0$ auf $h = k\, k_1\, k_2 \ldots$ Arten entwerfen.</u> Eine von diesen Arten wird für das Folgende willkürlich ausgewählt.

Auch was wir oben über den arithmetischen Charakter der Nebengitterzahlen sagten, gilt unverändert für den Fall einer negativen Discriminante.

Wir resumiren nochmals die Eigenschaften unserer Normalfigur, indem wir sagen:

<u>Unsere Normalfigur besteht aus h Gittern. Je zwei conjugirte Gitter liegen bezüglich der Coordinatenaxen symmetrisch gegen das Hauptgitter. Das Haupt-</u>

gitter selbst ebenso wie die Anceps-Gitter liegen symmetrisch gegen sich selbst. Gegenüber der Multiplication bilden die Punkte der Normalfigur ein abgeschlossenes Ganze, indem je zwei Punkte miteinander multiplicirt einen dritten Punkt ergeben, welcher wieder der Normalfigur angehört.

Die Theilbarkeitsgesetze im Gebiete der orientirten Gitterzahlen.

Wir geben nun unserer Betrachtung eine neue Wendung. Wir wollen nämlich das durch die Normalfigur definirte Zahlenmaterial auf die Theilbarkeitsgesetze untersuchen. Das allgemeine Resultat, zu welchem wir gelangen werden, ist dieses:

Die Theilbarkeitsgesetze der gewöhnlichen Zahlentheorie (eindeutige Zerlegung in Primfactoren) behalten in unserem Gebiete ihre unverän-

derte Gültigkeit.

Wir erinnern zunächst kurz an die Theilbarkeit im gewöhnlichen Zahlengebiete.

Man nennt eine ganze Zahl theilbar durch eine zweite, wenn der Quotient wieder eine ganze Zahl ist. Man bezeichnet ferner als Einheiten solche Zahlen, durch welche die 1 theilbar ist und als Primzahlen solche, welche ausser durch sich selbst nur durch Einheiten getheilt werden können. In dem gewöhnlichen Zahlengebiete giebt es nur zwei Einheiten, nämlich die Zahlen + 1 und − 1.

Der Fundamentalsatz der gewöhnlichen Zahlentheorie besagt nun:

Jede ganze Zahl m lässt sich auf eine und nur auf eine Weise in ein Produkt von Primzahlen zerlegen, wobei natürlich Einheiten in beliebiger Weise den einzelnen Factoren hinzugefügt

werden können, wenn nur das Produkt derselben insgesammt + 1 ist.
Das gewöhnliche Zahlengebiet

-3 -2 -1 0 1 2 3 4

mögen wir etwa gleichfalls geometrisch auffassen als ein Gitter von einer Dimension. Dadurch wird die Analogie mit unserem jetzigen Zahlengebiete klar. Wir haben jetzt nicht ein eindimensionales, sondern ein zweidimensionales Gebiet zu betrachten und in diesem nicht ein Gitter, sondern eine endliche Anzahl von Gittern. Gleichzeitig soll hiermit angedeutet werden, das wir bei der Verallgemeinerung der gewöhnlichen Theilbarkeitsgesetze bei dem zweidimensionalen Gebiete nicht stehen zu bleiben brauchen, sondern auch drei-dimensionale, vier-dimensionale Gitter etc. betrachten können.

Wir übertragen nun die Definitionen der gewöhnlichen Zahlentheo-

rie auf unser zweidimensionales Gebiet. Dabei werden wir, strenge genommen, „Punkt" statt „Zahl" sagen müssen.

1. Ein Punkt unseres Zahlengebietes heisst theilbar durch einen anderen, wenn der Quotient beider ein ganzzahliger Punkt ist, (d. h. ein Punkt, dessen Coordinaten ganze algebraische Zahlen sind).

2. Als „Einheitspunkt" bezeichnen wir solche Punkte, durch welche der Punkt (1,1) theilbar ist. Die Einheitspunkte sind allgemein gegeben durch die Formel:

$$\varepsilon = \left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}\right)^{u} \qquad \bar{\varepsilon} = \left(\frac{t_0 - u_0\sqrt{d}}{2}\right)^{u},$$

wo t_0 und u_0 bestimmte ganzzahlige Lösungen der Pell'schen Gleichung bedeuten.

Wie wir wissen, giebt es bei positivem d unendlich viele Einheitspunkte, bei negativem d nur eine endliche Anzahl.

3. Wir nennen „Primpunkte" sol-

che Punkte $(\pi, \bar{\pi})$, welche durch keine anderen Punkte theilbar sind, als durch die Einheitspunkte und durch sich selbst.

4. Zwei Punkte heissen <u>relativ prim</u>, wenn es ausser den Einheitspunkten keine Punkte giebt, die in beiden aufgehen.

5. Ein Punkt (ξ, η) heisst der grösste gemeinsame Theiler zweier Punkte $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$, wenn die Punkte

$$\left(\frac{\xi_1}{\xi}, \frac{\eta_1}{\eta}\right), \left(\frac{\xi_2}{\xi}, \frac{\eta_2}{\eta}\right)$$ ganzzahlige relativ prime Punkte sind.

Nachdem diese Definitionen vorausgeschickt sind, können wir dazu übergehen, die elementaren Rechenoperationen für unsere Gitterzahlen zu studiren. Wir betrachten

1. <u>Addition und Subtraction.</u>
Bezüglich dieser Operationen können wir nur das negative Resultat wiederholen, dass wir bereits pag 119 ausgesprochen haben,

daſs wir nämlich bei Anwendung derselben im allgemeinen unseren Zahlencomplex verlassen. Wenn wir also an der Beschränkung festhalten, daſs die vorzunehmenden Operationen immer wieder auf Punkte der Normalfigur führen, so sind Addition und Subtraktion von Gitterpunkten nicht gestattet, abgesehen von der selbstverständlichen Ausnahme, daſs die Punkte <u>demselben</u> Gitter angehören.

2. <u>Multiplication.</u> Diese Operation ist im Gegensatz zu den beiden eben genannten uneingeschränkt ausführbar, d. h. wir bekommen durch Multiplication zweier beliebiger Punkte unserer Normalfigur immer wieder einen Punkt derselben, wie wir bereits eingehend nachgewiesen haben.

3. <u>Division.</u> Bezüglich der Division der Gitterpunkte gilt der folgende Satz:

<u>Ist ein Gitterpunkt durch einen</u>

anderen theilbar, so ist der Quotient wieder ein Gitterpunkt.

Zu dem Beweise der folgenden Sätze bemerken wir ein für allemal, dafs wir immer nur die auf die eine Gitterzahl (ξ) bezüglichen Gleichungen hinschreiben wollen, während wir in Gedanken durchaus an der Auffassung festhalten, dafs jedem Gitterpunkte zwei Coordinaten (ξ, η) zugehören.

Es sei die Zahl ξ' aus dem Gitter G' durch die Zahl ξ aus dem Gitter G theilbar. Wir haben dann den Quotienten $\frac{\xi'}{\xi}$ zu betrachten, der nach Voraussetzung eine ganze algebraische Zahl ist. Um demselben nun zur besseren Beurtheilung einen rationalen Nenner zu geben, erweitern wir ihn mit der zu ξ conjugirten Zahl $\bar{\xi}$. Ist $\xi\bar{\xi} = r$, wo r eine ganze rationale Zahl bedeutet, so ist

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\xi'\bar{\xi}}{r}$$

Nun liegt $\bar{\xi}$ in dem zu G conjugirten Gitter $\bar{G}$, also $\xi'\bar{\xi}$ in dem Gitter $G'\bar{G}$, es sei etwa:

$$\xi'\bar{\xi} = \varrho\left(\sqrt{a}\,x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y_0\right).$$

Dann ist

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\xi'\bar{\xi}}{r} = \varrho\left(\sqrt{a}\cdot\frac{x_0}{r} + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,\frac{y_0}{r}\right).$$

Da aber $\frac{\xi'}{\xi}$, wie wir vorausgesetzt haben, eine ganze algebraische Zahl sein soll, müssen nach unserem Hülfssatze pag 165 auch $\frac{x_0}{r}$, $\frac{y_0}{r}$ ganze rationale Zahlen sein, d.h. auch $\frac{\xi'\bar{\xi}}{r}$ oder $\frac{\xi'}{\xi}$ liegt in dem Gitter $G'\bar{G}$.

4. Eindeutige Zerlegung in Primpunkte.

Wir können jetzt dazu übergehen, unsere Betrachtungen über die Gitterpunkte zu krönen, indem wir folgendes Fundamentaltheorem beweisen:

Sofern wir von der willkürlichen Wahl hinzutreten der Ein-

heitspunkte absehen, lässt sich irgend ein Gitterpunkt unserer Normalfigur nur auf eine bestimmte Weise in Primpunkte zerlegen.

Den Beweis dieses Satzes führen wir in derselben Weise, wie es in der elementaren Zahlentheorie geschieht. Hier stützt man sich auf den Algorithmus der Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers zweier ganzer Zahlen. Dementsprechend wollen wir uns auch hier fragen: Wie finden wir den grössten gemeinsamen Theiler zweier beliebig gegebener Gitterzahlen ξ und ξ'?

Dabei wollen wir an die hergebrachte Terminologie anknüpfen. Diese ist nur vom Standpunkte der historischen Entwickelung aus zu verstehen. Ursprünglich beschäftigte man sich ausschliesslich mit den Zahlen des Hauptgitters, um so mehr, als diese in den einfachsten Fällen $d = -3$ und $d = -4$ zugleich die allgemein-

sten Gitterzahlen darstellen. Diese Zahlen nannte man wirkliche Zahlen.
Bei der Behandlung der höheren Fälle zeigte sich aber, daſs man mit diesen Zahlen nicht auskommt, sondern auch die Zahlen der Nebengitter hinzunehmen muſs, wenn man die eindeutige Zerlegbarkeit in Primfactoren aufrecht erhalten will; diese Nebengitterzahlen nannte man im Gegensatz ideale Zahlen.

Eine neue Auffassung wurde in diesen Theil der Zahlentheorie durch Dedekind hineingetragen. Dedekind bemerkte, daſs man die Betrachtung dennoch auf das Hauptgitter beschränken kann, daſs man nämlich jeder Nebenzahl sozusagen ein Bildgitter entsprechen lassen kann, welches in dem Hauptgitter enthalten ist. Dieses Bildgitter erzeugen wir auf folgende Weise. Wir multipliciren die Nebenzahl ξ mit allen Zahlen des conjugir-

ten Gitters. Dadurch erhalten wir nach Satz 1 pag 182 die Eckpunkte eines Gitters, welches dem Hauptgitter eingelagert ist. Wir bemerken, dass dasselbe dem eben benutzten conjugirten Gitter ähnlich ist, es entsteht nämlich dadurch, dass wir jenes in einem bestimmten Verhältnisse vergrössern und um einen gewissen (durch den Azimuthalfactor von ξ gegebenen) Winkel verdrehen.

Der Inbegriff der ξ-Coordinaten dieses Gitters nennt Dedekind ein „Ideal"

Diese Terminologie drückt eigentlich, dem Wortlaute nach, das Umgekehrte aus von dem, was sie ausdrücken sollte. Wenn man sich überhaupt auf den Standpunkt stellen will, dass die Zahlen des Hauptgitters allein wirklich, die der Nebengitter ideal sind, so müsste man doch unser Bildgitter, welches die ideale Zahl realiciren soll und welches ganz aus „wirklichen Zahlen"

besteht, eher ein „Real" nennen. Dieser Widerspruch zwischen Ausdruck und Sinn wird besonders fühlbar, wenn diese Zahl ξ im Besonderen eine Hauptzahl ist. Man wird der Gleichförmigkeit wegen auch diesen Zahlen ein Bildgitter entsprechen lassen. Wir haben dann ein reales Gegenbild einer schon an sich realen Grösse. Trotzdem wird ein solches Gitter „Hauptideal" genannt, wodurch der Anschein erweckt wird, alsob ein solches Gitter besonders wenig real wäre.

Wie dem auch sei, jedenfalls werden wir die Terminologie und noch in höherem Maasse den Gedankengang der Dedekind'schen Theorie für unsere Zwecke verwenden. Um dem Dedekind'schen „Ideal" näher zu kommen, können wir für „Bildgitter" etwa Idealgitter sagen.

Das Erste, was wir jetzt näher zu untersuchen haben, ist

die Beziehung zwischen den Gitterzahlen und Idealgittern.

Wir werfen in dieser Hinsicht zwei Fragen auf:

1. Ist durch ein gegebenes Idealgitter eine zugehörige Gitterzahl bestimmt?

2. Ist durch eine gegebene Gitterzahl ein zugehöriges Idealgitter bestimmt?

Ad 1. Die Antwort auf die erste Frage lautet, daß das Idealgitter nicht völlig eine bestimmte Gitterzahl charakterisirt, daß nämlich alle nur durch Einheiten verschiedenen Punkte unserer Figur als Bildgitter dasselbe Idealgitter liefern.

Sei nämlich $\mathfrak{J}$ ein Idealgitter, dem die Gitterzahl ξ entspricht, so daß

$$\mathfrak{J} = \xi \cdot \mathfrak{G}$$

ist, wo $\mathfrak{G}$ ein Gitter unserer Normalfigur bedeutet.

Wir fragen, giebt es noch eine andere Gitterzahl ξ' derart, daß auch

$$\mathfrak{J} = \xi' \cdot \mathfrak{G}'$$

ist, wo G' wiederum ein Gitter unserer Normalfigur bedeutet.

Hier können wir nun zunächst behaupten, daß die Gitter G und G' identisch sein müssen. Da sie nämlich durch Multiplication mit ξ, resp. ξ' d. h. durch Ausübung von Ähnlichkeitstransformationen, in dasselbe Gitter $\mathfrak{F}$ übergehen, so müssen sie jedenfalls ähnlich sein. Da aber beide unserer Normalfigur angehören sollen, müssen auch die Inhalte ihrer Fundamentalparallelogramme gleich sein, d. h sie müssen überhaupt identisch sein.

Die beiden Ausdrücke

$$\xi G \text{ und } \xi' G$$

stellen nun dasselbe Gitter dar, es muß daher der eine aus dem anderen durch eine Automorphie, d. h. Multiplication mit einer Einheit ε hervorgehen, d. h. es muß

$$\xi' G = \varepsilon \xi G \text{ sein, oder } \xi' = \varepsilon \xi .$$

Dies Resultat können wir so in Worte fassen:

<u>Durch ein gegebenes Idealgitter ist die Gitterzahl ξ nur bis auf hinzutretende Einheitsfactoren bestimmt.</u>

Ad 2. Unsere zweite Frage müssen wir bejahen. Wir werden nämlich sogleich für das zu einer Gitterzahl gehörige Idealgitter eine Eigenschaft kennen lernen, vermöge deren dasselbe unzweideutig festgelegt ist. Die bisherige Definition des Ideals ist insofern nicht ohne Weiteres eindeutig, als es ja vorkommen könnte, dass in unserer Normalfigur der durch das Ideal abzubildende Gitterpunkt mehreren unserer h Gitter gleichzeitig angehörte. Jenachdem wir ihn dann dem einen oder anderen dieser Gitter zuzählten, würden wir bei der Bildung des Ideals zu verschiedenen Ausdrücken

geführt werden.

Die Eigenschaft des Idealgitters, um welche es sich handeln soll, ist folgende: Das nach unseren früheren Regeln zu einem Gitterpunkte ξ hinzuconstruirte Idealgitter ist der Inbegriff aller durch ξ teilbaren Hauptzahlen.

Beweis: Erstens ist jede Zahl des Idealgitters eine durch ξ theilbare Hauptzahl.

Umgekehrt: Ist eine beliebige Hauptzahl ω durch ξ theilbar und ξ in dem Gitter G enthalten, so ist $\frac{\omega}{\xi}$ nach Satz pag 178 in dem Gitter $H \cdot \bar{G}$ oder $\bar{G}$ gelegen, wo $\bar{G}$ das zu G conjugirte Gitter bedeutet, d. h. ω wird erzeugt durch Multiplication von ξ mit einer Zahl des conjugirten Gitters, was wir eben behauptet haben.

Nehmen wir nun an, es gäbe zu einem Gitterpunkte zwei verschiedene Ideale! Wir erkennen sofort, daß diese Annahme

absurd ist, denn beide als verschiedenen vorausgesetzte Idealgitter müssen mit dem Inbegriff der durch unsere Gitterzahl theilbaren Hauptzahlen zusammenfallen. Mithin giebt es zu jedem Gitterpunkte unserer Figur nur ein bestimmtes Idealgitter.

Eine unmittelbare Folge dieses Satzes ist ersichtlich die, daß keine zwei Gitter unserer Figur (vom Anfangspunkte abgesehen) einen Punkt gemein haben können. Wäre dieses nämlich der Fall, so könnten wir zu dem betr. Punkte zwei verschiedene Bildgitter hinzuconstruiren, indem wir ihn mit den Punkten der beiden Gitter multipliciren, welche mit den Gittern, denen er selbst angehört, conjugirt sind.

Der letzte Satz ist für die Auffassung unserer Normalfigur natürlich von grosser Wichtigkeit. Die Uebersichtlichkeit dieses an

sich etwas complicirten geometrischen Gebildes wird durch ihn erheblich gesteigert – oder vielmehr, sie würde völlig verloren gehen, wenn der Satz nicht bestünde.

Wir schreiten nun zu einer neuen Definition der Idealgitter, die wir als die Dedekind'sche bezeichnen, da sie von diesem herrührt.

Ausser den Idealgittern sind dem Hauptgitter viele andere Gitter eingelagert. Ein solches dem Hauptgitter eingelagertes Gitter nennt nun Dedekind ein Ideal, wenn es die folgende Eigenschaft besitzt:

Ein beliebiger Punkt des Gitters giebt, multiplicirt mit einem beliebigen Punkte des Hauptgitters, wieder einen Punkt des Gitters.

Hier bietet sich uns die Aufgabe, die Beziehungen zwischen unserer und der Dedekind'schen Definition aufzusuchen, eventuell die Identität beider Definitionen nachzuweisen. Die Untersuchung wird sich mit der

Beantwortung der folgenden beiden Fragen zu befassen haben:

1. Ist ein Idealgitter in unserem Sinne stets ein Dedekind'sches Ideal?

2. Ist ein Dedekind'sches Ideal stets ein Idealgitter in unserem Sinne?

Ad 1. Die Antwort auf die erste Frage ist leicht mit ja zu geben, wie sofort daraus folgt, daß unsere Idealgitter der Inbegriff der durch eine feste Zahl theilbaren Hauptzahlen sind. Greifen wir nämlich einen beliebigen Punkt des Idealgitters heraus, so ist dieser gleich dem Produkte von einer bestimmten Zahl ξ mit einer Zahl des zu dem Gitter von ξ conjugirten Gitters. Multipliciren wir dieses Produkt mit einer Hauptzahl, so ergiebt sich eine Zahl, welche nach unseren früheren Sätzen über Gittercomposition aufgefasst werden kann als Produkt derselben Zahl ξ mit einer gewissen Zahl desselben zu ξ conjugirten Gitters. Die

ses Product kommt aber nach Definition unter den Punkten des Idealgitters vor.

Ad 2. Die zweite Frage müssen wir ebenfalls mit ja beantworten, wie wir jetzt nachweisen wollen.

Wählen wir einen Basispunkt des vorliegenden Gitters auf der u-Axe, was stets möglich ist, so können wir dasselbe schreiben:

$$G = ax + \left(m + n\frac{\sqrt{d}}{2}\right)y,$$

wobei wir uns der Einfachheit halber auf den Fall $d \equiv 0 \pmod 4$ beschränken. a, m, n bedeuten hier ganze rationale Zahlen.

Nach Voraussetzung soll nun G die Eigenschaft haben, daß, wenn man eine beliebige Zahl aus G mit einer beliebigen Hauptzahl multiplicirt, wieder eine Zahl aus G heraus kommt. Wir machen deshalb den Ansatz:

$$\left[ax + \left(m + n\frac{\sqrt{d}}{2}\, y\right)\right]\left[x' + \frac{\sqrt{d}}{2}\, y'\right] = ax'' + \left(m + n\frac{\sqrt{d}}{2}\right)y''$$

Hier müssen sich für alle ganzzahligen Werthe von x, y, x', y' auch ganzzahlige Werthe x'', y'' ergeben, d. h. die bilinearen Ausdrücke, welche x'' und y'' als Functionen von $x, y \mid x', y'$ darstellen, müssen ganzzahlige Coefficienten haben. Diese lauten aber:

$$x'' = xx' - \frac{m}{n} xy' \qquad - \frac{m^2 - n^2\frac{d}{4}}{an} yy'$$

$$y'' = \qquad \frac{a}{n} xy' + yx' + \frac{m}{n} yy'.$$

Aus der zweiten Zeile folgt, daß a und m durch n theilbar sein müssen, d. h. alle Zahlen des Gitters G sind durch die ganze rationale Zahl n theilbar; wir betrachten deshalb zunächst das einfachere Gitter:

$$\frac{G}{n} = \frac{a}{n} x + \left(\frac{m}{n} + \frac{\sqrt{d}}{2}\right) y,$$

das wir der Kürze halber wieder schreiben:

$$ax + \left(m + \frac{\sqrt{d}}{2}\right) y.$$

Die zugehörige Form lautet:

$$a^2x^2 + 2amxy + \left(m^2 - \frac{d}{4}\right) y^2.$$

Aus den Formeln 1., die für unseren jetzigen Fall Geltung haben, wenn wir $n = 1$ setzen, folgt nun, daß $m^2 - \frac{d}{4}$ durch a theilbar sein muß. Die zum Gitter gehörige Form können wir daher auch schreiben:

$$a\left(a x^2 + 2 m x y + \frac{m^2 - \frac{d}{4}}{a} y^2\right) = a(a x^2 - b x y + c y^2).$$

Die in Klammern stehende Form ist nun eine Stammform, weil sie die Discriminante d besitzt; wir können deshalb setzen:

$$a x + \left(m + \frac{\sqrt{d}}{2}\right) y = \varrho \sqrt{a} \cdot \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\, x + \frac{-b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\, y\right)$$

d.h. das Gitter $a x + (m + \frac{\sqrt{d}}{2}) y$ ist das Bildgitter der Gitterzahl $\varrho \sqrt{a}$ und daher das ursprüngliche Gitter G das Bildgitter der Gitterzahl $n \cdot \varrho \sqrt{a}$, womit die Richtigkeit unserer Behauptung dargethan ist.

Wir wollen jetzt noch eine <u>Verallgemeinerung der gesammten Idealtheorie</u> kurz besprechen, welche uns durch die Normalfigur nahe gelegt wird. Da wir in dieser im-

Haupt- und Nebengitter gleichzeitig und gleichberechtigt vor Augen haben, so werden wir es als eine Willkür bezeichnen, dass wir die Untersuchung der idealen Faktoren durchaus auf das Hauptgitter warfen. Es zeigt sich nämlich, dass wir das Hauptgitter ebensogut durch ein beliebiges, aber festes Nebengitter ersetzen können, welches wir sozusagen zum Bildträger für die den übrigen Punkten unserer Normal-Figur zuzuordnenden Bildgitter machen.

Wir verfahren folgendermassen: Sei G' das ausgezeichnete beliebige Gitter, welches wir zum Bildträger machen wollen, G dasjenige Gitter, in welchem der abzubildende Punkt liegt. Zunächst suchen wir das Gitter G'' auf, welches mit G componirt das Gitter G' ergiebt, so dass also

$$G \cdot G'' = G' \quad \text{ist.}$$

Um das Bildgitter der zu G gehörigen Gitterzahl

$$\varrho\left(\sqrt{a}\,x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y_0\right)$$

zu entwerfen, multiplicieren wir diese mit allen Gitterzahlen von G'', nämlich mit

$$\varrho''\left(\sqrt{a''}\,x + \frac{b''+\sqrt{d}}{2\sqrt{a''}}\,y\right).$$

Das so entstehende Gitter

$$\varrho\varrho''\left(\sqrt{a}\,x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y_0\right)\left(\sqrt{a''}\,x + \frac{b''+\sqrt{d}}{2\sqrt{a''}}\,y\right)$$

ist nach der Compositionstheorie dem Gitter G' eingelagert und liefert ein Bild des dem Gitter G angehörigen Punktes. Wir werden dieses Bildgitter ein <u>Nebengitterideal</u> nennen. Wir sagen also:

<u>Jedem Gitterpunkte unserer Normalfigur kann nicht nur im Hauptgitter ein Ideal entsprechend gesetzt werden, sondern auch in jedem fest verabredeten Nebengitter G!</u>

Diese neue Begriffsbildung wird

uns in der Theorie der singulären Moduln sehr nützlich sein, da sie der Gleichberechtigung der verschiedenen Wurzeln der Modulargleichung von vornherein Rechnung trägt.

Wollen wir das Nebengitterideal in Dedekind'scher Weise definiren, so constatiren wir zunächst die selbstverständliche Thatsache, daß die Zahlen desselben ein Gitter bilden, d. h. sich durch Addition und Subtraction reproduciren. Ferner aber: Multipliciren wir die Zahlen dieses Systems mit einer beliebigen Hauptzahl α, so ergeben sich Zahlen, welche demselben System angehören. In der That sind die Zahlen $G''\alpha$ wieder Zahlen des Gitters G'', daher gehören auch die Zahlen $\xi \cdot G''\alpha$ dem ursprünglichen, in G' gelegenen Bildgitter an.

Wiederum können wir den Satz umkehren, wo er dann lautet: <u>Befindet sich in einem festen</u>

Gitter G' ein eingelagertes Gitter welches die Eigenschaft hat, dass seine Punkte, multiplicirt mit beliebigen Punkten des Hauptgitters, wieder ihm angehörige Punkte ergeben, so ist dieses eingelagerte Gitter ein zu dem Gitter G' gehöriges Nebengitterideal.

Den Beweis führen wir auf den entsprechenden Satz für die Hauptgitterideale zurück. Ist

$$\xi_1 x + \xi_2 y$$

ein dem festen Gitter G' eingelagertes Gitter mit der vorausgesetzten Eigenschaft, und componiren wir dasselbe mit dem zu G' conjugirten Gitter $\bar{G}'$, so ergiebt sich offenbar ein dem Hauptgitter eingelagertes Gitter:

$$(\xi_1 x + \xi_2 y) \cdot \bar{G}' = \omega_1 x + \omega_2 y,$$

das ebenfalls die Eigenschaften eines Dedekind'schen Ideals besitzt. Entspricht ihm der ideale

Factor ξ aus dem Gitter $\mathfrak{G}$, so ist

$$\omega_1 x + \omega_2 y = \xi \cdot \bar{\mathfrak{G}},$$

wo $\bar{\mathfrak{G}}$ das zu $\mathfrak{G}$ conjugirte Gitter bedeutet. Aus den hingeschriebenen Gleichungen folgt nun:

$$\xi_1 x + \xi_2 y = \mathfrak{G}'(\omega_1 x + \omega_2 y) = \xi \mathfrak{G}' \bar{\mathfrak{G}} = \xi \cdot \mathfrak{G}'',$$

d.h. ξ ist auch der zu $\xi_1 x + \xi_2 y$ gehörige ideale Factor und daher $\xi_1 x + \xi_2 y$ ein Nebengitterideal in unserem Sinne.

Wir gehen jetzt auf das Entsprechen zwischen Idealen und idealen Factoren näher ein und beweisen dies bezüglich den folgenden grundlegenden Satz, der uns zeigt dass hinsichtlich der Theilbarkeit Ideal und idealer Factor völlig aequivalent sind:

<u>Sind alle Zahlen eines Idealgitters (mag es nun im Hauptgitter oder in einem festen Nebengitter liegen) durch eine ganze algebraische Zahl theilbar, so ist auch</u>

<u>der zugehörige ideale Factor durch dieselbe theilbar.</u>

Beweis: Bezeichnen wir das Ideal mit $\xi \cdot G$ und sind alle Zahlen desselben durch die ganze algebraische Zahl η theilbar, so sind alle Zahlen des Ideals $\xi^h G^h$ oder $\xi^h H$ durch η^h theilbar. Da nun in H die 1 enthalten ist, muss ξ^h durch η^h theilbar sein, oder $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^h$ eine ganze algebraische Zahl. Ist aber $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^h$ eine ganze algebraische Zahl, so ist es auch $\frac{\xi}{\eta}$. Denn genügt $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^h$ etwa der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots a_{n-1} x + a_n = 0,$$

wo $a_1, \dots a_{n-1}, a_n$ ganze rationale Zahlen bedeuten, so genügt $\frac{\xi}{\eta}$ der Gleichung

$$x^{nh} + a_1 x^{(n-1)h} + \dots a_{n-1} x^h + a_n = 0,$$

ist also ebenfalls eine ganze algebraische Zahl.

Wir fügen dem vorstehenden Theorem noch den folgenden leicht

einzusehenden Satz hinzu:
Die Zahlen eines Stammgitters (mag es nun das Haupt- oder ein Nebengitter sein) besitzen in ihrer Gesammtheit keinen gemeinsamen Theiler.
Besässen dieselben nämlich einen gemeinsamen Theiler, so müsste die zum Gitter gehörige Form offenbar imprimitiv sein, was bei einer Stammform nicht möglich ist.
Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu unserer Hauptaufgabe. Als solche haben wir pag. 180 bezeichnet: Einen dem Euklidischen analogen Algorithmus zu finden, welcher zur Auffindung des grössten gemeinsamen Theilers zweier Gitterzahlen ξ und ξ' führt. Die Gitterzahlen können dabei Haupt- oder Nebenzahlen sein, zu gleichen oder zu verschiedenen Gittern gehören.
Unser Verfahren, welches, wie wir sehen werden, dem Verfahren der gewöhnlichen Zahlentheorie

genau nachgebildet ist, soll in Folgendem bestehen. Wir bilden zu beiden Zahlen die zugehörigen Idealgitter:

$$\xi . G \text{ und } \xi' . G'$$

Wir fügen diese Gitter in der Weise zusammen, dass wir zu jeder Zahl des einen jede Zahl des anderen Gitters addiren, d. h. wir addiren die beiden Gitter. Die entstehende Summe ist wieder ein Gitter und zwar ein Idealgitter, weil es die Dedekind'schen Definitionsbedingungen befriedigt. Es muss daher zu ihm ein idealer Factor τ gehören, nach dessen Abspaltung noch das Stammgitter T übrig bleiben möge, so dass wir haben:

$$\xi . G + \xi' . G' = \tau . T$$

Wir behaupten nun, dass τ der gesuchte grösste gemeinsame Theiler von ξ und ξ' ist. Denn

erstens ist τ ein Theiler sowohl von ξ wie von ξ', weil alle Zahlen von $\xi \cdot G$ und von $\xi' \cdot G'$ durch τ theilbar sind, also nach Satz pag 198 auch ξ und ξ' selbst. Ferner sind aber auch $\frac{\xi}{\tau}$ und $\frac{\xi'}{\tau}$ relativ prim. Denn wir haben

$$\frac{\xi}{\tau} \cdot G + \frac{\xi'}{\tau} \cdot G' = T$$

Hätten nun $\frac{\xi}{\tau}$ und $\frac{\xi'}{\tau}$ noch einen gemeinsamen Theiler, so müssten auch sämmtliche Gitterzahlen des Stammgitters T durch ihn theilbar sein. Diese besitzen aber, wie wir soeben ausgeführt haben, keinen gemeinsamen Theiler. Daher gilt dasselbe auch für $\frac{\xi}{\tau}$ und $\frac{\xi'}{\tau}$, d. h. τ ist der grösste gemeinsame Theiler von ξ und ξ'.

Daher die folgende Regel: Um den grössten gemeinschaftlichen Theiler zweier Gitterzahlen zu finden, addire man die zugehörigen Ideale und bestimme

den zu dem entstehenden Ideal gehörigen idealen Factor.

Um zu zeigen, dass dieser Process dem der gewöhnlichen Zahlentheorie parallel geht, bestimmen wir etwa den grössten gemeinschaftlichen Divisor von 6 und 9. Wir können da so sagen: Wir bilden das zur Zahl 6 und das zur Zahl 9 gehörige Ideal. Dieses Ideal besteht natürlich aus der Gesammtheit der durch 6 bez. durch 9 theilbaren Zahlen der natürlichen Zahlenreihe. Durch Addition beider Ideale folgt das Zahlensystem

$$0,\ 3,\ 6,\ 9,\ \ldots,$$

welches wir auffassen können als das zur Zahl 3 gehörige Ideal. Diese Zahl 3 ist der gesuchte grösste gemeinsame Theiler von 6 und 9. –

Nachdem wir im Vorstehenden die begriffliche Seite unseres Processes geschildert haben, wird es keine Schwierigkeit haben, densel-

ben in arithmetische Form zu setzen. Das Princip wird dabei folgendes sein: Zu jedem der beiden Ideale ξG und $\xi' G'$ gehören zwei Basiszahlen.

Durch passende Zusammenfügung der letzteren wird man die Basiszahlen des durch Summation entstehenden Ideales berechnen. Aus dem letzteren bestimmt sich aber leicht der zugehörige ideale Factor.

Wir erkennen nun auch deutlich den eigentlichen Grund, welcher zu der Einführung der Ideale in diese Betrachtung zwingt. Dieser besteht darin, daß man zur Uebertragung des Euklidischen Algorithmus die Addition der Gitterzahlen nöthig hat. Diese können wir aber bei zwei beliebigen Gitterzahlen, sofern dieselbe verschiedenen Gittern angehören, nicht ausführen, ohne aus unserer Normalfigur herauszutreten. Es ist nöthig, die Zahlen vorerst commensurabel zu machen, beispielsweise dadurch,

dafs man ihnen je ein Zahlensystem des Hauptgitters zuordnet. Die so entstehenden Bilder kann man dann nach Belieben durch Addition combiniren.

Gleichzeitig bemerken wir nochmals, dafs die Auszeichnung des Hauptgitters hierbei unwesentlich ist. Wir können die Bilder der Gitterzahlen ebensogut in einem beliebigen, aber festen anderen Gitter construiren, weil auch diese die Addition zulassen.

Wir möchten hier noch ausdrücklich der in den Büchern häufig ausgesprochenen Ansicht entgegentreten, wonach es im Gebiete der complexen algebraischen Zahlen keinen dem gewöhnlichen analogen Algorithmus des grössten gemeinsamen Theilers gebe. Diese Ansicht ist nur berechtigt, wenn man sich auf den speciellen Standpunkt stellen will, dafs allein die Zahlen des Hauptgitters als Material gegeben sind. Dem-

gegenüber sahen wir, dass, bei gleichmässiger Berücksichtigung der Nebengitter, der elementare Process in passender Verallgemeinerung genau aufrecht erhalten werden kann.

Auf Grund unseres Processes können wir nun alle diejenigen Schlüsse, welche man an denselben in der gewöhnlichen Zahlentheorie knüpft, genau wiederholen und kommen dabei zu entsprechenden Resultaten.

Wir haben uns vor allen Dingen zu überlegen, dass überhaupt nothwendigerweise Primzahlen existiren. Der Grund ist, dass die Factorenzerlegung einer vorgelegten Gitterzahl, von der Abspaltung von Einheiten abgesehen, nicht in's Unendliche weiter gehen kann. Denn zu den Factoren müssen ganzzahlige Werthe von f gehören, welche den zur gegebenen Gitterzahl gehörigen ganzzahligen Werth von f theilen.

Ferner aber handelt es sich um den Satz, <u>daß eine beliebige Zahl sich auf eine und nur auf eine Weise in ein Produkt von Primzahlen zerlegen lasse.</u>

Der Hauptpunkt beim Beweise desselben bildet, wie bekannt, schon in der gewöhnlichen Zahlentheorie das folgende Lemma:

<u>Wenn das Produkt zweier Zahlen durch eine Primzahl theilbar ist, so wird nothwendiger Weise eine der beiden Zahlen durch die Primzahl getheilt.</u>

Dieses Lemma wollen wir hier für unser Zahlengebiet in Kürze beweisen, während wir die übrigen Theile des Beweises überspringen können, da sie aus der gewöhnlichen Zahlentheorie unmittelbar herübergenommen werden können.

Seien also α und β zwei Gitterzahlen, von denen bekannt ist, daß ihr Produkt $\alpha\beta$ durch eine Primzahl π theilbar ist. Wir

nehmen an, dafs etwa α durch π nicht theilbar sei. Dann ist der grösste gemeinsame Theiler von α und π die Einheit. Bilden wir nun die zu α und π gehörigen Idealgitter, so erhalten wir durch Summation ein neues Ideal, welches zu dem Factor 1 gehört, also das ganze Hauptgitter ausmacht. In diesem mufs insbesondere der Einheitspunkt (1, 1) selbst enthalten sein. Mithin haben wir die Gleichung:

$$\alpha A + \pi \Pi = 1,$$

unter A und Π geeignet gewählte Zahlen aus den zu α und π conjugirten Gittern verstanden. Diese Gleichung multipliciren wir beiderseits mit β. Es ist aber in der Gleichung

$$\alpha \beta A + \beta \pi \Pi = \beta$$

die linke Seite nach Voraussetzung durch π theilbar. Also ist es auch

die rechte. Wir sehen also, daß von den beiden Zahlen α und β nothwendig eine durch π theilbar ist.

Von hier aus folgt der Beweis des Fundamentalsatzes über die eindeutige Zerlegbarkeit eines jeden Gitterpunktes in Primpunkte in bekannter Weise von selbst.

Wir schliessen unsere Darstellung der für unser Zahlengebiet geltenden Theilbarkeitsverhältnisse damit, daß wir eine Aufzählung sämtlicher in unserem Zahlgebiete vorhandenen Primzahlen vornehmen.

1. Die Aufzählung wird durch den folgenden Satz erleichtert.

Man erhält alle Primpunkte unserer Figur, wenn man zusieht, in welche Factoren sich die auf der horizontalen Geraden des Hauptgitters gelegenen Punkte (p, p) zerlegen lassen, deren Coordinaten p Primzahlen im Sinne der gewöhnlichen Zahlentheorie sind.

In der That, sei $(\pi, \bar{\pi})$ ein belie-

biger Primpunkt, welcher mit seinem conjugirten $(\pi, \bar{\pi})$ multiplicirt den rationalen Punkt (m, m) ergiebt. Hier ist, wie wir behaupten, m eine gewöhnliche Primzahl p oder das Quadrat einer solchen. Denn

1. kann m nicht durch 2 verschiedene rationale Primzahlen p und q theilbar sein. Wäre nämlich:

$m = p . q . m'$, so hätten wir, da auch

$m = \pi . \bar{\pi}$

unter allen Umständen zwei verschiedene Zerlegungen von m, mögen nun p, q und m' noch weiter zerlegbar sein oder nicht.

2. Es muss also m die Potenz einer gewöhnlichen Primzahl sein:

$$m = p^{\lambda}.$$

Hier kann nun λ höchstens gleich 2 sein, weil sonst offenbar m in mehr als 2 Primfactoren zerlegbar wäre, was der Gleichung $m = \pi . \bar{\pi}$ widerspricht.

Hiermit ist die Richtigkeit des angegebenen Satzes dargethan, aber implicite auch schon eine Eintheilung der aufzuzählenden Primzahlen gegeben. Wir werden dieselben nämlich in 2 Categorieen eintheilen, je nachdem $\lambda = 1$ oder $\lambda = 2$ ist.

I $\lambda = 1$. Es ist $\pi \cdot \bar{\pi} = p$

Hier sind wieder noch 2 Fälle zu scheiden

a) π und $\bar{\pi}$ verschieden

b) $\pi = \bar{\pi}$ (natürlich bis auf Einheiten)

In beiden Fällen bleibt die gewöhnliche Primzahl p nicht mehr Primzahl in unserem Zahlsystem, sondern ist noch weiter in 2 Primfaktoren zerlegbar.

II) $\lambda = 2$, $\pi \cdot \bar{\pi} = p \cdot p$

Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung folgt:

$$\pi = \bar{\pi} = p.$$

In diesem Falle ist die gewöhnliche Primzahl p auch Primzahl in unserem erweiterten Zahlsystem.

2. Wir fragen nun weiter, wann die Fälle I & II eintreten werden. Diesbezüglich haben wir den Doppelsatz:

Der Fall I tritt ein, d. h. die gewöhnliche Primzahl p ist in das Product zweier conjugirter Primfactoren spaltbar, wenn p durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar ist.

Der Fall II tritt ein, d. h. die gewöhnliche Primzahl p ist nicht weiterzerlegbar, wenn p nicht durch eine quadr. Form der Discr. d darstellbar ist.

Der erste Theil dieses Satzes ist selbstverständlich, denn die Darstellung von p durch eine quadr. Form der Discriminante d giebt direct die beiden Primfactoren an, in die p zerlegbar ist.

Die Richtigkeit des zweiten Theiles ist leicht auf indirecte Weise zu schliessen. Angenommen p wäre nicht durch eine quadr. Form der Discriminante d

darstellbar und doch zerlegbar, etwa

$$p = \pi . \bar{\pi}$$, so könnten wir setzen

$$\pi = \rho\left(\sqrt{a}\,x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y_0\right) \text{ und } \bar{\pi} = \frac{1}{\rho}\left(\sqrt{a}\,x_0 + \frac{b+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\,y_0\right).$$

Hieraus würde folgen:

$$p = a x_0^2 + b x_0 y_0 + c y_0^2 \text{ und } b^2 - 4ac = d,$$

d.h. p wäre doch durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar, was der Voraussetzung widerspricht. Es kann deshalb p in dem angenommenen Falle nicht weiter zerlegbar sein.

3. Bevor wir auch die Fälle I a und I b trennen, fügen wir noch folgenden Satz ein:

Lässt sich p durch eine Form der Discriminante d darstellen, so giebt es speciell auch eine solche Form, deren erster Coefficient p ist.

Es sei

$$p = a x_0^2 + b x_0 y_0 + c y_0^2,$$

wo x_0, y_0 zwei ganze rationale

Zahlen bedeuten, die nothwendig theilerfremd sein müssen, da p Primzahl sein soll. Wir wenden nun auf die Form $ax^2+bxy+cy^2$ die Substitution:

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha x'+\beta y' \\ y=\gamma x'+\delta y' \end{array}\right| \alpha\delta-\beta\gamma=1$$

an.

Hierdurch entstehe die Form

$$a'x'^2+b'x'y'+c'y'^2.$$

In unserer linearen Substitution können wir die Coefficienten α und γ willkürlich wählen mit der alleinigen Beschränkung, dass sie keinen gemeinsamen Theiler haben dürfen. Wie aus dem Anfang dieser Vorlesung bekannt, lassen sich dann in der That stets correspondirende Werthe von β und δ bestimmen. Speciell wollen wir α und γ gleich x_0 und y_0 nehmen. Dann gehört zu dem Werthepaare $x'=1$, $y'=0$ das Werthepaar $x=x_0$,

$y = y_0$. Unsere Form (a', b', c') muss also für $x' = 1, y' = 0$ den Werth p liefern; wir haben mithin:

$a' = p$, was zu beweisen war.

4 Wir gehen jetzt dazu über, die Criterien für die Fälle I a und I b anzugeben:

I a. Die Primzahl p ist in das Produkt zweier verschiedener Primfaktoren zerlegbar, wenn p nicht in d aufgeht (und wenn, wie bereits angegeben wurde, p durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar ist.)

I b. Die Primzahl p zerfällt in das Produkt zweier gleicher Primfaktoren $\sqrt{p} \cdot \sqrt{p}$, wenn p in d aufgeht.

Die Beweise für diese Angaben liegen in den folgenden Ausführungen.

Ist d durch p theilbar, so ist auch der zweite Coefficient der Form (p, b', c') durch p theilbar. Durch Reduktion kann man einen der beiden Fälle erreichen: $b' = 0$ oder

$c' = p$. In beiden Fällen ist die Form eine Ancepsform.

Sie lautet:

$$px^2 - \frac{d}{4p}y^2, \text{ beziehungsweise}$$

$$px^2 + pxy + \frac{p^2 - d}{4p}y^2.$$

Auf Grund unserer Orientirung der Ancepsgitter ergiebt sich die Zerlegung

$$p = \sqrt{p} \cdot \sqrt{p},$$

p erscheint also als das Quadrat einer sich selbst conjugirten Primzahl.

Geht p nicht in d auf, so ist auch der zweite Coefficient von (p, b', c') nicht durch p theilbar. Wir erhalten daher hier eine Zerlegung:

$p = \varrho\sqrt{p} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \sqrt{p}$, wo ϱ von 1 und einer Einheit verschieden ist.

p erscheint also als das Produkt zweier ungleicher Primzahlen.

5. Wir wollen jetzt die vorstehenden Kriterien noch etwas vereinfachen, indem wir die Darstellbar-

keit von p durch eine quadratische Form der Discriminante d auf das Legendre'sche Symbol $\left(\frac{d}{p}\right)$ zurückführen.

Ist nämlich p durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar, so giebt es eine quadratische Form mit dem ersten Coefficienten p:

$$p x^2 + b x y + c y^2, \text{ so dass}$$

$b^2 - 4pc = d$, also $b^2 \equiv d \pmod{4p}$ ist.

Umgekehrt besteht die Congruenz $b^2 \equiv d \pmod{4p}$, so lässt sich stets p durch eine quadratische Form

$$p x^2 + b x y + \frac{b^2 - d}{4p} y^2$$

mit der Discriminante d darstellen.

Für das Folgende haben wir jetzt die Fälle $p = 2$ und p ungerade gesondert zu betrachten.

6. Wir untersuchen zunächst die Zerlegbarkeit von 2, betrachten also die Congruenz:

$$b^2 \equiv d \pmod{8}$$

Von Hause aus hat die Discriminante d eine der Formen:

$$8\sigma,\ 8\sigma+1,\ 8\sigma+4,\ 8\sigma+5.$$

Hiervon erledigen sich die Fälle $d = 8\sigma$ und $d = 8\sigma+4$ sofort; beidemale ist nämlich d durch 2 theilbar; infolgedessen zerfällt 2 in die Primfactoren $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$.

Ist $d = 8\sigma+1$, so ist die Congruenz $b^2 \equiv d \pmod 8$ lösbar, daher 2 durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar und folglich in zwei verschiedene Primfactoren zerlegbar.

Ist $d = 8\sigma+5$, so ist die obige Congruenz nicht lösbar, daher auch 2 nicht durch eine Form der Discriminante d darstellbar und infolgedessen unzerlegbar. Zusammenfassend haben wir:

$d \equiv 0 \pmod 4$ . . . $2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

$d = 8\sigma+1$ . . . . 2 zerfällt in das Produkt zweier verschiedener Primfactoren

$d = 8\sigma+5$ 2 ist unzerlegbar.

7. Wir betrachten jetzt den Fall, dass p eine ungerade Primzahl ist. In diesem Falle zieht die Lösbarkeit der Congruenz $b^2 \equiv d \pmod{p}$ diejenige der Congruenz $b^2 \equiv d \pmod{4p}$ stets nach sich. Wir können daher sofort das folgende Resultat hineinschreiben:

$\left(\frac{d}{p}\right) = +1$; p zerfällt in das Produkt zweier verschied. Primfactoren

$\left(\frac{d}{p}\right) = 0$; p " " " " " gleichen " $V_p V_p$.

$\left(\frac{d}{p}\right) = -1$; p ist unzerlegbar, also selbst Primzahl.

8. Wir wollen endlich bei einer beliebigen Zahl

$$n = p^{\kappa} q^{\lambda} \ldots$$

fragen <u>auf wieviel Arten dieselbe als Produkt zweier conjugirter Zahlen V und $\overline{V}$ unseres Gebietes aufgefasst werden kann.</u> Zu dem Zwecke zerlegen wir $p, q \ldots$ sofern es angeht und ordnen die einzelnen Factoren $\pi, \overline{\pi}$ auf alle Weisen zu conjugirten Produkten. Dies

ist eine rein combinatorische Aufgabe.

Bemerken wir noch, dass diese Frage übereinstimmt mit der Frage nach der <u>Anzahl der Darstellungen, welche die Zahl n durch Formen unserer Discriminante zulässt.</u> In der That giebt jede solche Darstellung eine Zerlegung der Zahl n und umgekehrt.

Geometrisch bedeutet diese Anzahl die Zahl derjenigen Gitterpunkte, welche in der Normalfigur die Entfernung $\sqrt{n}$ von O haben. Aus der vorstehenden Regel zur Berechnung jener Zahl ersehen wir, dass sie bei einer grösseren Anzahl in n vorkommender Factoren sehr erheblich sein kann. Es giebt dann eine grosse Menge von Punkten, welche von O dieselbe Entfernung $\sqrt{n}$ haben. Aber alle diese Punkte sind in unserer Normalfigur verschieden, weil sie sich eben aus verschiedenen Primpunkten aufbauen.

9. VII. 96. Hiermit schliessen wir unsere Behandlung der Compositionstheorie ab. Wir sollten dieselbe eigentlich noch weiter führen, indem wir sie von den Stammgittern (Discriminante d), auf beliebige Zweiggitter (Discriminante $D = n^2 d$) ausdehnen. Diese Verallgemeinerung bietet keine principiellen Schwierigkeiten, muss aber hier der Kürze halber übergangen werden. Trotzdem werden wir die bisherigen Resultate gelegentlich auch für Zweiggitter in Anspruch nehmen.

III. Haupttheil.

Theorie der singulären elliptischen Gebilde.

Wir legen eine ganzzahlige negative Discriminante zu Grunde und betrachten die zu dieser Discriminante gehörige Normalfigur, bestehend aus h Gittern in bestimmter Orientirung. Die hierdurch definirten Gitterzahlen sind gewöhnliche complexe Zahlen von der Form $u \pm i v$. Die Discriminante wollen wir bezeichnen mit $D = -\nabla$, (indem wir uns das Zeichen Δ für die Discriminante der elliptischen Functionen vorbehalten).

Zu jedem dieser Gitter gehört ein gewisses elliptisches Gebilde. Dasselbe heisst singulär, weil die aus den Perioden ω_1, ω_2 (den Basiszahlen unseres Gitters) gebildete quadratische Form

$f = (\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y) = ax^2 + bxy + cy^2$
eine ganzzahlig Form ist.

Wir studiren die Besonderheiten dieser singulären Gebilde. Dieselben bestehen allgemein zu reden darin, daß die Compositionstheorie auf sie Anwendung findet.

Speziell erinnern wir an den Schering'schen Satz (vergl. pg. 145) wonach jedes unserer h Gitter (bez. elliptischer Gebilde) durch eine Anzahl erzeugender Gitter (Gebilde) dargestellt werden kann in der Form

$$G = \Gamma^{\alpha} \Gamma'^{\alpha'} \dots$$

Um an diese bestimmte Art der Darstellung zu erinnern, schreiben wir statt G: G_α (oder auch eventl. $G^{(\alpha)}$). Die Thatsache der Gittercomposition drückt sich dann einfach durch die Formel aus

$$G_\alpha \cdot G_{\alpha'} = G_{\alpha+\alpha'}.$$

Unter den Invarianten unserer elliptischen Gebilde werden wir dabei

nach den früheren Entwickelungen die folgenden berücksichtigen, die wir nach der Stufenzahl bez. nach ihrem Grade in den Variabeln ω_1, ω_2 noch einmal tabellarisch zusammenstellen:

	Modulfunctionen (Grad = 0)	Modulformen (Grad ≠ 0)
1. Stufe	$j = 1728\, J$	g_2, g_3, $\sqrt[12]{\Delta}$ Grad −4, −6, −1
5. Stufe	ζ	ζ_1, ζ_2 Grad + 1.

Wir unterwerfen nun unsere Gebilde beliebigen Transformationen höherer Ordnung, suchen also zu den gegebenen Punktgittern neue auf, welche in jene eingelagert sind. Nun kennen wir für jedes unserer k Gitter eine besondere Kategorie von eingelagerten Gittern, nämlich die Idealgitter.

Die Besonderheit, welche unsere

singulären Gebilde gegenüber Transformationen höherer Ordnung darbieten, werden darin bestehen, daß unter den transformirten Gebilden diejenigen vorhanden sind, welche den Idealgittern entsprechen.

Aus dieser Bemerkung fliessen in der That höchst bemerkenswerthe Consequenzen bezüglich der soeben genannten Invarianten. Wir behandeln zunächst die Invarianten der 1ᵗᵉ Stufe und unterwerfen dieselben einer Transformation vom Primzahlgrade p (wobei wir $p > 2$ voraussetzen mögen).

Wir müssen unterscheiden, ob die Zahl p in unserer Normalfigur unzerlegbar ist, ob sie in das Produkt zweier gleicher oder zweier verschiedener Factoren zerfällt. Ueber den ersten Fall ist nichts Besonderes zu bemerken, weil sich hier die Transformationstheorie der singulären Gebilde ebenso gestaltet wie die der

nichtsingulären. Der zweite Fall tritt nur bei denjenigen Primzahlen auf, welche Theiler der Discriminante D' sind, und soll zunächst zurückgeschoben werden. Wir setzen demnach voraus, daß der dritte Fall vorliegt, daß wir also haben

$$p = \pi . \bar{\pi}$$

wo π und $\bar{\pi}$ zwei verschiedene Primzahlen sind, welche bez. zu den Gittern G_β und $G_{-\beta}$ gehören mögen.

Es handle sich um die Transformation des elliptischen Gebildes G_α, welches nach Belieben als zu dem Hauptgitter oder zu einem Nebengitter gehörig vorausgesetzt werden möge. Wir kennen von vornherein zwei dem Gitter G_α eingelagerte Gitter, nämlich die beiden (Haupt- oder Neben-) Idealgitter.

$$\pi . G_{\alpha-\beta}\,, \quad \bar{\pi} . G_{\alpha+\beta}\,.$$

In der That gehören alle Ecken

dieser beiden Gitter nach der Compositionstheorie dem Gitter G_α an. Wir haben nämlich:

$$G_\beta \cdot G_{\alpha-\beta} = G_\alpha \quad \text{bez.} \quad G_{\bar\beta} \cdot G_{\alpha+\beta} = G_\alpha.$$

Die Perioden der durch unsere Idealgitter definirten elliptischen Gebilde sind ersichtlich, wenn wir mit $\omega_1^{(\alpha-\beta)}$, $\omega_2^{(\alpha-\beta)}$ etc. die Perioden von $G^{(\alpha-\beta)}$ etc. bezeichnen, die folgenden:

$$\begin{cases} \pi . \omega_1^{(\alpha-\beta)} \\ \pi . \omega_2^{(\alpha-\beta)}, \end{cases} \quad \begin{cases} \bar\pi . \omega_1^{(\alpha+\beta)} \\ \bar\pi . \omega_2^{(\alpha+\beta)}. \end{cases}$$

Diese Perioden entstehen also aus den Perioden von $G_{\alpha-\beta}$ und $G_{\alpha+\beta}$ durch Multiplication mit der complexen Grösse π oder $\bar\pi$, oder wie man kurz sagt, durch „complexe Multiplication."

Beiläufig bemerken wir, dass die zu unsern beiden Idealgittern gehörige quadratische Form die folgende ist:

$$f = \pi\bar\pi(\omega_1^{(\alpha\mp\beta)}x + \omega_2^{(\alpha\mp\beta)}y)(\bar\omega_1^{(\alpha\mp\beta)}x + \omega_2^{(\alpha\mp\beta)}y).$$

Sie entsteht also aus der zu $G_{\alpha+\beta}$ gehörigen Form durch Multiplication mit p; sie ist imprimitiv und hat die Discriminante $p^2 D$.

Hinsichtlich des Elementarparallelogramms der Idealgitter folgt hieraus: Dieses ist gleich $p\sqrt{-D}$, also p-mal so gross wie das Elementarparallelogramm eines der gegebenen h Gitter.

In Folge dessen entstehen unsere Idealgitter aus dem Gitter G_1 durch Transformation p^{ter} Ordnung. Nun wissen wir von früher her (vergl. pg 29), dass allgemein aus einem beliebigen Gitter durch Transformation p^{ter} Ordnung $p+1$ neue grossmaschige Gitter entstehen, die dem gegebenen Gitter eingelagert sind.

Von diesen $p+1$ Gittern sind in unserem Falle zwei von vornherein bekannt, nämlich unsere Idealgitter.

Wir haben damit den centralen

Satz in der Theorie der singulären elliptischen Gebilde bezeichnet. Sehen wir zu, welche algebraischen Folgerungen sich daraus ergeben.

Wir betrachten zunächst die Transformationsgleichung für die Invariante j:

$$F(j', j) = 0$$

und verstehen unter j die zum Gitter G_α gehörige Invariante, die wir j_α nennen. Die Invarianten der $p+1$ transformirten Gitter j' werden durch die Wurzeln unserer Gleichung bestimmt. Denken wir uns nun die Invarianten $j_1 \ldots j_\alpha$ gegeben, welche zu den ursprünglichen Gittern unserer Normalfigur gehören, so sind von den $p+1$ Wurzeln der Transformationsgleichung zwei bekannt, nämlich die Invarianten der Idealgitter. Da j nur von dem Periodenquotienten $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ abhängt und da die Perioden der Idealgitter aus denen von G_α - B

und $G_{\alpha+\beta}$ durch complexe Multiplication hervorgehen, so sind die Invarianten der Idealgitter mit den Invarianten $J_{\alpha-\beta}$ und $J_{\alpha+\beta}$ identisch. Es sind also in der That von den $p+1$ Wurzeln zwei bekannt, nämlich

$$J' = J_{\alpha-\beta} \text{ und } J' = J_{\alpha+\beta}.$$

Der soeben abgeleitete Satz lässt eine wichtige Verschärfung zu, nämlich:

Die übrigen $p-1$ Wurzeln der Transformationsgleichung sind von den singulären $J_1, J_2, \ldots J_k$ verschieden.

Der Beweis für diese Behauptung ist sehr einfach. Soll $J' = J_k$ sein, so muss das zu J' gehörige Gitter G' dem zu J_k gehörigen Stammgitter ähnlich sein, also

$$G' = \mu_{\alpha-k} \cdot G_k$$

Um die Natur der Zahl $\mu_{\alpha-k}$ zu erkennen, komponire ich beiderseits mit G_{-k}, so dass sich ergiebt:

$$G' G_{-k} = \mu_{\alpha-k} H.$$

Da nun H die 1 enthält, muss $u_{\alpha-k}$ in dem Gitter $G' G_{-k}$ vorkommen und auch, da G' in G_α enthalten ist, in dem Gitter $G_\alpha \cdot G_{-k} = G_{\alpha-k}$. Es ist also $u_{\alpha-k}$ eine Gitterzahl des Gitters $G_{\alpha-k}$. Hieraus folgt, dass G' ein dem Gitter G_α eingelagertes Idealgitter ist. Nun ergiebt sich aus der Eindeutigkeit der Factorenzerlegung von p, dass es nur zwei in G_α durch Transformation p^{ter} Ordnung eingelagerte Idealgitter giebt, nämlich

$$\pi \cdot G_{\alpha-\beta} \text{ und } \bar{\pi} \cdot G_{\alpha+\beta}.$$

Mit einem von diesen muss also G' nothwendig identisch sein, d. h. es ist j_k entweder gleich $j_{\alpha-\beta}$ oder gleich $j_{\alpha+\beta}$, wie wir behauptet haben.

Nehmen wir ferner die Multiplicatorgleichung:

$$\Phi(M, j) = 0.$$

Diese ist in M vom $(p+1)^{ten}$

Grade; ihre Coefficienten sind nach Adjunction der Grössen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ (vergl. pg) rational. Ihre Wurzeln bestimmen zu dem Gitter G_α die Multiplicatoren der zugehörigen $p+1$ transformirten Gitter. Denken wir uns die Werthe der Discriminante Δ, welche zu den ursprünglichen h Gittern gehören, gegeben, so sind wiederum zwei von den $p+1$ Wurzeln der Multiplicatorgleichung bekannt, nämlich die Multiplicatoren der Idealgitter. In der That werden die Discriminanten der Idealgitter

$$\Delta' = \Delta(\pi.\omega_1^{(\alpha-\beta)}, \pi\omega_2^{(\alpha-\beta)}) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{12} \Delta^{(\alpha-\beta)}$$

bezw.

$$\Delta' = \Delta(\bar\pi\,\omega_1^{(\alpha+\beta)}, \bar\pi\,\omega_2^{(\alpha+\beta)}) = \left(\frac{1}{\bar\pi}\right)^{12} \Delta^{(\alpha+\beta)},$$

mithin die zugehörigen Multiplicatoren:

$$M = \pi\sqrt[12]{\frac{\Delta^{(\alpha-\beta)}}{\Delta^{(\alpha)}}} \text{ bez. } M = \pi\sqrt[12]{\frac{\Delta^{(\alpha+\beta)}}{\Delta^{(\alpha)}}}.$$

Diese von vornherein bekannten Grössen müssen sich unter den Wurzeln der Multiplicatorgleichung vorfinden. Allerdings bleibt hierbei noch unbestimmt und muss durch besondere Betrachtungen festgestellt werden, welcher von den zwölf Werthen von M, die in den vorstehenden Ausdrücken enthalten sind, der Multiplicatorgleichung genügt. Hierüber entscheiden die von Hurwitz gegebenen Entwickelungen.

10. VII. 96. Die vorhergehenden allgemeinen Resultate sollen nun specialisirt werden.

Wir halten zunächst daran fest, dass p in zwei verschiedene Primfactoren π und $\bar{\pi}$ zerfällt, setzen aber voraus, dass diese in ein und demselben Gitter, d. i. in einem Ancepsgitter liegen. Dann ist also $G_\beta = G_{-\beta}$ und $G_{\alpha-\beta} = G_{\alpha+\beta}$. Die beiden ausgezeichneten Wurzeln der Transformationsgleichung werden in diesem Falle iden-

tisch; es ist $J_{\alpha-\beta} = J_{\alpha+\beta}$. Unsere Gleichung $F(J; J_\alpha) = 0$ erhält also eine Doppelwurzel, falls die beiden Factoren von p einem Anceps gitter angehören.

Was die Multiplicatorgleichung betrifft, so wird hier $\Delta_{\alpha+\beta} = \Delta_{\alpha-\beta}$. Die beiden ausgezeichneten Wurzeln der Multiplicatorgleichung werden also in dem vorausgesetzten Specialfalle:

$$M = \pi \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha\pm\beta}}{\Delta_\alpha}} \text{ bez. } M = \bar{\pi} \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha\pm\beta}}{\Delta_\alpha}}.$$

Wir wollen eine weitere vereinfachende Annahme hinzufügen. Die beiden (verschiedenen) Factoren π und $\bar{\pi}$ sollen nicht einem Ancepsgitter schlechtweg, sondern speciell dem Hauptgitter angehören. Die Transformationsgleichung besitzt dann wie vorher eine Doppelwurzel; diese Doppelwurzel ist aber speciell gleich der Invariante des ursprünglichen Gitters

G_α.

Wir haben

$$J' = J_{\alpha-\beta} = J_{\alpha+\beta} = J_\alpha.$$

Gleichzeitig werden die beiden ausgezeichneten Wurzeln der Multiplicatorgleichung direct gleich

$$\pi \qquad\qquad \text{und } \bar{\pi}$$

(ev. bis auf hinzutretende 12te Einheitswurzeln).

Nachdem wir so den allgemeinen Fall behandelt haben, wo p in das Product zweier ungleicher Primfactoren zerfällt, mögen wir noch ein paar Worte über den besonderen Fall sagen, wo p gleich dem Quadrate eines sich selbst conjugirten Primfactors.

$$p = \pi^2$$

wird. Jetzt giebt es unter den durch Transformation p^{ter} Ordnung aus G_α entstehenden Gittern nur ein Idealgitter. Daher ist von den

$p+1$ Wurzeln der Transformationsgleichung <u>nur eine</u> bekannt, nämlich

$$J' = J\alpha \pm \beta;$$

ebenso ist von den $p+1$ Werten des Multiplicators <u>nur einer</u> von vornherein angebbar, nämlich

$$M = \pi \sqrt{\frac{\Delta\alpha \pm \beta}{\Delta\alpha}}$$

Das Gitter G_β, welchem die Zahl π angehört, ist in diesem Falle (vergl. pag. 216) eo ipso ein Anceps-gitter. Setzen wir dieses noch speciell als das Hauptgitter voraus, so ergeben sich ähnliche Vereinfachungen wie oben.

Hieran schließt sich leicht die Verallgemeinerung auf einen beliebigen Transformationsgrad. Sei der Transformationsgrad etwa

$$n = p^a q^b \ldots$$

Wir zerlegen die Zahl n in ihre Primfactoren π, $\bar{\pi}$, k, $\bar{k}$ etc. und

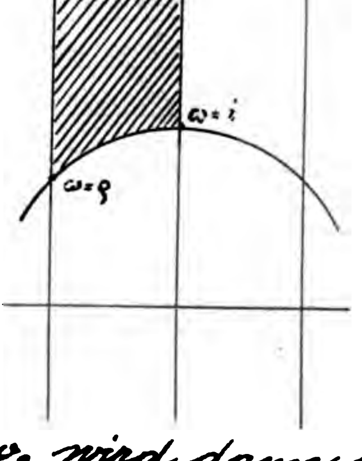
fassen diese auf alle Weisen in das Product zweier conjugirter Zahlen $n = r.\bar{r}$ zusammen, je der Factor r von n bestimmt nun ein Idealgitter, welches dem Gitter G_α durch Transformation n^{ter} Ordnung eingelagert ist. Dementsprechend erhält die Transformationsgleichung bez. die Multiplicatorgleichung ebenso viele bekannte Wurzeln, als es unterschiedene Factoren von n giebt. Gehört etwa r zum Gitter G_β, so sind dieses die Wurzeln

$$J' = J_{\alpha+\beta} \text{ bez. } M = r\sqrt[n]{\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_\alpha}}.$$

Die Fruchtbarkeit dieser allgemeinen Sätze möge zunächst an einem speciellen Beispiele dargethan werden.

Unter allen Discriminantenwerthen sind die einfachsten $d = -3$ und $d = -4$.

Sie sind dadurch ausgezeichnet, dass sie nur eine Klasse liefern. In unserer Dreiecksfigur entsprechen diesen Werthen die Eckpunkte $\omega = \rho$ und $\omega = i$. [Es liegt nahe, auch die dritte Ecke des Fundamentaldreiecks heranzuziehen. Diese liegt allerdings auf der Begrenzung der ω- Halbebene und entspricht daher einer zerfallenden Form von der Discriminante $d = 0$. Von den beiden



Perioden ω_1 und ω_2 wird dann die eine unendlich gross. In Folge dessen artet unser parallelogrammatisches Gitter in ein blosses Streifensystem aus. Wir kämen so von dem Fundamentalbereich der doppeltperiodischen Functionen zu dem der Exponentialfunction

und von der Theorie der singulären Moduln zu der Kreistheilungstheorie.

Es wäre ausserordentlich interessant, die Theorie der Kreistheilungsgleichungen unter diesem Gesichtspunkte als Grenzfall der Gleichungen der Transformationstheorie zu behandeln.)

Hier beschränken wir uns auf den Fall $d = -3$. In diesem Falle ist $g_2 = 0$ und daher auch $j = 0$. Wir untersuchen also die Transformation desjenigen speciellen elliptischen Gebildes, für welches $J\alpha = 0$ ist. Es giebt für $d = -3$ nur dieses eine elliptische Gebilde; h ist also $= 1$.

Das besondere Interesse dieses Gebildes liegt in der relativ grossen Anzahl der Einheiten. Für $d = -3$ giebt es die folgenden sechs Einheiten

$$\pm 1, \pm \rho, \pm \rho^2,$$

wo

$$\rho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \rho^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

ist. Die Existenz der Einheiten kommt darin zum Ausdrucke, daß das Gitter ein gleichseitiges ist, daß es also bei einer Drehung um 60° mit sich zur Deckung kommt.

Wir haben nun die diesem Gitter eingelagerten Gitter zu betrachten. Die letzteren zerfallen in zwei Kategorien, je nachdem sie selbst bei einer Drehung um 60° mit sich zur Deckung kommen, oder nicht. Im ersten Falle sind sie ihrerseits gleichseitige Gitter, also dem ursprünglichen ähnlich. Nun entstehen aber die dem ursprünglich ähnlichen Gitter aus jenem durch gleichzeitige Multiplication der Perioden mit einer Gitterzahl. Diese Gitter sind daher keine anderen als unsere Idealgitter. Was die andere

Kategorie der eingelagerten Gitter betrifft, so muss es zu jedem von ihnen zwei andere Gitter geben, in welche dasselbe successive bei der Drehung um 60° übergeführt wird. Die Gitter der zweiten Kategorie gehören also zu dreien zusammen und gehen bei den Automorphien des Ausgangsgitters cyklisch in einander über.

Hiernach können wir sofort ein eigentümliches Verhalten der Transformationsgleichung vorhersehen. Setzen wir nämlich in $F(j';j)=0$ die Invariante j gleich Null, so werden sich je nach der Zerlegbarkeit der Zahl p im Körper $\sqrt{-3}$ keine eine oder zwei Wurzeln, $j'=0$ abspalten. Die übrigen Wurzeln aber müssen zu dreien einander gleich werden. Nur die erstere Thatsache gehört eigentlich in die Theorie der complexen Multiplication; die

letztere folgt ihrerseits aus der Existenz der Einheiten. Unser Resultat folgt übrigens auch aus der Gestalt des zum Transformationsgrade p gehörigen Fundamentalpolygons; vergl. oben pag.?

Wir behandeln der Reihe nach die Primzahlen

$$p = 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13.$$

Von diesen ist (nach pag. 219) 2, 5 und 11 unzerlegbar; die Zahl 3 geht in der Discriminante auf und wird daher gleich dem Quadrat eines Primfactors, multiplicirt mit einer Einheit:

$$3 = -(\varrho - \varrho^2)^2.$$

Die Zahlen 7 und 13 sind zerlegbar; u. zw. bekommen wir aus einer Zerlegung noch zwei andere (im Wesentlichen allerdings identische) Zerlegungen durch Multiplication mit den (nicht trivialen) Einheiten ϱ und ϱ^2. So ergiebt sich:

$7 = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = \frac{1-3\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{1+3\sqrt{-3}}{2} = \frac{5+\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{5-\sqrt{-3}}{2}$

und

$13 = (1+2\sqrt{-3})(1-2\sqrt{-3}) = \frac{7+\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{7-\sqrt{-3}}{2} = \frac{5+3\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{5-3\sqrt{-3}}{2}$

(Dass wir die beiden Factoren immer noch simultan im Vorzeichen ändern können, entspricht der „trivialen" Einheit -1.)

Um die zugehörigen Transformationsgleichungen aufzustellen, benutzen wir am besten ein Verfahren, welches in Math. Ann. Bd. 14 pag. 143 angegeben ist. Schliessen wir den Fall $p = 11$ aus, der uns wegen der Unzerlegbarkeit der Zahl 11 ohnehin nicht interessirt, so wird in allen übrigen Fällen die Transformationsgleichung vom Geschlechte Null, wie man aus der Betrachtung der Transformationspolygone in der ω-Ebene folgern kann. Alsdann können wir J und J' als rationale Functionen eines geeigneten Parameters τ bestimmen, der auf dem Polygon jeden Werth nur einmal annimmt;

oder auch, wir können J als rationale Function von τ, J' als rationale Function eines zweiten Parameters τ' bestimmen und zwischen τ und τ' eine lineare Abhängigkeit festsetzen. An der genannten Stelle wird nun gemacht:

$$\left.\begin{aligned} J : J-1 : 1 &= \varphi(\tau) : \chi(\tau) : \psi(\tau) \\ J' : J'-1 : 1 &= \varphi(\tau') : \chi(\tau') : \psi(\tau') \end{aligned}\right\} \tau\tau' = \text{const.}$$

Hier sind φ, χ, ψ rationale Functionen $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades. Die vorstehenden Gleichungen vertreten mit Vortheil die Transformationsgleichung $F(j', j) = 0$, (sobald wir noch für J $\frac{j}{1728}$ einsetzen.)

Im Falle der Discriminante $d = -3$ wird nun noch, wie erwähnt, $j = 0$. Dies giebt zur Bestimmung von τ die Gleichung $\varphi(\tau) = 0$. Der correspondirende Werth von τ' folgt dann aus $\tau\tau' = \text{const}$ und der Werth der

transformirten Invariante j' aus der Gleichung $F' = \frac{\varphi(\tau')}{\psi(\tau')}$.

Im Folgenden stellen wir die Gleichung $\varphi(\tau) = 0$ für die Transformationsgrade 2, 3, 5 etc. zusammen und geben gleichzeitig den Zusammenhang der Grösse τ mit dem Multiplicator, wie es ebenfalls in Bd. XIV aufgestellt wurde.

__$n = 2$.__ Die Gleichung für τ lautet:

$$(4\tau - 1)^3 = 0.$$

Da 2 unzerlegbar, kommt die Idealtheorie bei dieser Transformation nicht weiter zur Geltung. Wohl aber sehen wir, dass die drei transformirten Gitter unter einander congruent werden. Der Uebergang zu τ' wird vermittelt durch

$$\tau\tau' = 1,$$

der Uebergang zu M durch

$$\tau = -\frac{1}{64} M^{12}.$$

__$n = 3$.__ In diesem Falle geht der Transformationsgrad in der Discriminante auf; es spaltet sich

oder auch, wir können J als rationale Function von τ, J' als rationale Function eines zweiten Parameters τ' bestimmen und zwischen τ und τ' eine lineare Abhängigkeit festsetzen. An der genannten Stelle wird nun gemacht:

$$\left.\begin{array}{l} J : J-1 : 1 = \varphi(\tau) : \chi(\tau) : \psi(\tau) \\ J' : J'-1 : 1 = \varphi(\tau') : \chi(\tau') : \psi(\tau') \end{array}\right\} \tau\tau' = \text{const.}$$

Hier sind φ, χ, ψ rationale Functionen $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades. Die vorstehenden Gleichungen vertreten mit Vortheil die Transformationsgleichung $F(j', j) = 0$, (sobald wir noch für J $\frac{j}{1728}$ einsetzen.)

Im Falle der Discriminante $d = -3$ wird nun noch, wie erwähnt, $j = 0$. Dies giebt zur Bestimmung von τ die Gleichung $\varphi(\tau) = 0$. Der correspondirende Werth von τ' folgt dann aus $\tau\tau' = \text{const}$ und der Werth der

transformirten Invariante j' aus der Gleichung $F' = \frac{\varphi(\tau')}{\psi(\tau')}$.

Im Folgenden stellen wir die Gleichung $\varphi(\tau) = 0$ für die Transformationsgrade 2, 3, 5 etc. zusammen und geben gleichzeitig den Zusammenhang der Grösse τ mit dem Multiplicator, wie es ebenfalls in Bd. XIV. aufgestellt wurde.

<u>n = 2.</u> Die Gleichung für τ lautet:

$$(4\tau - 1)^3 = 0.$$

Da 2 unzerlegbar, kommt die Idealtheorie bei dieser Transformation nicht weiter zur Geltung. Wohl aber sehen wir, dass die drei transformirten Gitter unter einander congruent werden. Der Uebergang zu τ' wird vermittelt durch

$$\tau\tau' = 1,$$

der Uebergang zu M durch

$$\tau = -\frac{1}{64} M^{12}.$$

<u>n = 3.</u> In diesem Falle geht der Transformationsgrad in der Discriminante auf; es spaltet sich

daher eine Wurzel der Gleichung $\varphi(\tau)=0$ ab; die drei übrigen werden einander gleich. Wir haben in der That

$$\varphi(\tau)=(\tau-1)(9\tau-1)^3=0, \quad \tau\tau'=1.$$

Aus der Wurzel $\tau=1$ ergiebt sich $\tau'=1$ und $\varphi(\tau')=0$ d. h. $j'=0$. Dieses besondere transformirte Gitter ist also dem ursprünglichen ähnlich. Zwischen τ und M besteht die Gleichung $\tau=\frac{M^6}{27}$; zur Wurzel $\tau=1$ gehört also der Multiplicator $M^6=27$. Nach der allgemeinen Theorie (vergl. pg. 235) wird der Multiplicator in unserem Falle bis auf eine zwölfte Einheitswurzel gleich dem Primfactor von 3, d. h. gleich $\sqrt{-3}$. Hiermit stimmt der soeben angegebene Werth $M^6=27$.

<u>$n=5$.</u> Da 5 unzerlegbar, ist über diesen Fall um wenig zu bemerken. Die Gleichung 6ten Grades $\varphi(\tau)=0$ muss zweimal drei gleiche Wurzeln haben. Sie lautet:

$$(\tau^2 - 10\tau + 5)^3 = 0;$$

ferner wird

$$\tau\tau' = 125, \quad \tau = -\mathfrak{M}^3.$$

n = 7. Da 7 unzerlegbar ist und zwar in zwei ungleiche Primfactoren, giebt es zwei singuläre Wurzeln der Gleichung $\varphi(\tau) = 0$ und im Übrigen zweimal drei gleiche. Unsere Gleichung lautet in der That

$$(t^2 + 13\tau + 49)(\tau^2 + 5\tau + 1)^3 = 0$$

mit

$$\tau\tau' = 49 \text{ und } \tau = \mathfrak{M}^2.$$

Die beiden singulären Werthe von τ, welche die complexe Multiplication vorhersagt, sind die folgenden

$$\tau^2 + 13\tau + 49 = 0$$

also

$$\tau = -\frac{13 \pm \sqrt{-27}}{2};$$

die zugehörigen Werthe von τ' lauten dann offenbar

$$\tau' = -\frac{13 \mp \sqrt{-27}}{2}.$$

Wir haben daher, wie es sein muß, $\varphi(\tau') = 0$ und $j' = 0$.

Von dem Werthe des Multiplicators wissen wir aus der allgemeinen Theorie, daß er gleich einem der Primfactoren π der Zahl 7 sein muss, d. h. gleich einer der 6 Zahlen

$$2 \pm \sqrt{-3}\ , \quad \frac{-1 \pm 3\sqrt{-3}}{2}\ , \quad \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

In der That haben wir nach den vorstehenden Angaben

$$\tau = \left(\frac{1 \pm 3\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = 16^2.$$

<u>$n = 11.$</u> Auf den Fall $n = 11$ findet weder die allgemeine Theorie der complexen Multiplication noch der besondere rechnerische Ansatz Anwendung.

<u>$n = 13.$</u> Wieder giebt es zwei singuläre Wurzeln in der Gleichung

$$\varphi(\tau) - (\tau^2 + 5\tau + 13)(\tau^4 + 7\tau^3 + 20\tau^2 + 19\tau + 1)^3 = 0.$$

Es sind dieses die Werthe

$$\tau = \frac{-5 \pm \sqrt{-27}}{2}$$

Ferner haben wir

$$\tau\tau' = 13, \quad \tau = \mathcal{M}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\tau' = \frac{-5 \mp \sqrt{-27}}{2}$$

und $\varphi(\tau') = 0$, wie es sein muss. Auch die Werthe des Multiplicators stimmen mit der allgemeinen Theorie, da sie gleich geeigneten Primtheilern von 13 werden:

$$\mathcal{M} = -\frac{5 \pm \sqrt{-27}}{2}.$$

In der Hurwitz'schen Dissertation ist die Discriminante -3 für alle möglichen Transformationsgrade durchdiscutirt. Es ergiebt sich dabei der allgemeine Satz (in Uebereinstimmung mit pg 235):

Jedem Factor ν des Transformationsgrades n entspricht eine Wurzel der Multiplicatorgleichung, welche gerade gleich ν ist. Die übrigen Wurzeln der Multiplicatorgleichung sind dreifach.

Hurwitz giebt die entsprechenden

Entwickelungen auch noch im Falle $d = -4$, d. h. für die zweite Ecke des Fundamentaldreiecks, wo $g_3 = 0$ und daher $J = 1$ ist.
16. VII. 96. Das allgemeine Ziel, welches wir bei den folgenden Entwickelungen im Auge haben soll dieses sein:
Näheres über die Natur der singulären Invarianten j, welche zu dem vorgegebenen Werthe $-\nabla$ gehören, zu erfahren.

Wir werden uns dabei in erster Linie auf die Transformationsgleichung $F(j', j) = 0$ stützen, in zweiter Linie auch auf die Multiplicatorgleichung $\Phi(M, j) = 0$.

Wir fragen uns vor allen Dingen wann in der Transformationsgleichung $F(j', j) = 0$ für irgend einen Transformationsgrad n $j' = j$ werden kann. Wir betrachten also die Gleichung:

$$F(j, j) = 0$$

und haben damit den Ausgangspunkt der Kronecker'schen Ent-

wickelungen, nur dass Kronecker nicht das j, sondern das k' oder auch $k^2(1-k^2)$ etc. als fundamentalen Modul benutzt.

Zunächst erkennt man leicht, dass unsere Gleichung lauter singuläre Invarianten j definirt.

Sei nämlich ω der zu dem Werthe j gehörige Periodenquotient, welcher bis auf Transformationen erster Ordnung bestimmt ist. Durch Transformation n^{ter} Ordnung entstehe aus ω der Werth

$$\omega' = \frac{a\omega+b}{c\omega+d}, \quad ad-bc=n.$$

Soll nun $j'=j(\omega')$ mit $j=j(\omega)$ zusammenfallen, so muss ω' mit ω aequivalent sein. Wir können in der letzten Gleichung direkt $\omega'=\omega$ setzen, indem wir die Transformation erster Ordnung, durch welche ω' aus ω erhalten wird, auf die rechte Seite der Gleichung werfen und die Bedeutung der

Zahlen a, b, c, d dementsprechend in passender Weise abändern. Wir erhalten so für ω die folgende ganzzahlige Gleichung

$$c\omega^2 + (d-a)\omega - b = 0.$$

Die zugehörigen Werthe von j sind daher sicher singuläre Invarianten.

Wir haben bereits pg. 234 einen Fall kennen gelernt, indem eine Wurzel j' der Transformationsgleichung $F(j'j) = 0$ speciell gleich j wird. Dieses trat dann ein, wenn der Transformationsgrad p in zwei Factoren π und $\bar{\pi}$ zerfällt, welche in dem zu der Discriminante $-\nabla$ gehörigen Hauptgitter liegen. Aus dem Satze von pg. 230 ergiebt sich leicht, dass auch das Umgekehrte richtig ist. Soll nämlich j' überhaupt gleich einer Invariante werden, welche zu derselben Discriminante gehört, wie $j = j_\alpha$, so muss sich p in dem Gitter G_β zerlegen lassen und j' einen der Werthe $j_{\alpha-\beta}$ oder

$p\alpha+\beta$ haben. Soll nun speciell $j'=j\alpha$ werden, so muss G_p das Hauptgitter werden, p also durch die zu $-\nabla$ gehörige Hauptform darstellbar sein. Uebertragen wir dieses Resultat von dem Primzahlgrade p auf einen beliebigen Grad n, so werden wir den Satz aufstellen:

Soll in der Transformationsgleichung $j'=j$ werden, so muss der Transformationsgrad n durch die Hauptform derjenigen Discriminante $-\nabla$ darstellbar sein, welche zu j gehört. Es wird in unserer Gleichung so viele Wurzeln $j'=j$ geben als verschiedene Zerlegungen $n=\nabla$ in dem betr. Hauptgitter möglich sind.

Der vorstehende Satz lässt sich auch ganz direkt beweisen. Soll j der Gleichung $F(j,j)=0$ genügen, so muss nach dem oben Gesagten ein zu j gehöriger Werth ω eine Relation:

$$\omega=\frac{a\omega+b}{c\omega+d}\ ,\ ad-bc=n$$

befriedigen.

Schreiben wir dieselbe in Form einer quadratischen Gleichung:

$$c\omega^2 + (d-a)\omega + b = 0,$$

so werden im allgemeinen c, $d-a$, b einen gemeinsamen Theiler, sagen wir u haben, nach dessen Fortschaffung die Gleichung lauten möge:

$$P\omega^2 + Q\omega + R = 0,$$

so daſs wir haben

$$c = Pu \quad d-a = Qu \quad -b = Ru$$

Setzen wir noch $a+d=t$, so können wir die vier Coefficienten a, b, c, d durch die Coefficienten unserer quadratischen Gleichung und t ausdrücken:

$$a = \frac{t-Qu}{2},\ b = -Ru,\ c = Pu,\ d = \frac{t+Qu}{2}.$$

Nun muſs aber $ad - bc = n$ sein oder, wenn wir die Discriminante von $P\omega^2 + Q\omega + R = 0$ mit $-\nabla$ be-

zeichnen:

$$\frac{t^2+\nabla u^2}{4}=n.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber leicht, wie eine kleine Umrechnung zeigt, daß n durch die zu $-\nabla$ gehörige Hauptform darstellbar ist und zwar einerlei, ob ∇ durch 4 theilbar ist oder nicht.

Umgekehrt erkennt man, daß jede Lösung unserer Gleichung eine Transformation n^{ter} Ordnung bestimmt, welche die Invariante j in sich verwandelt. Diese Aussage deckt sich aber mit dem zweiten Theile unseres Satzes.

Allerdings werden die so erhaltenen Transformationen n^{ter} Ordnung, wenn n einen quadratischen Teiler τ^2 enthält, zum Theil uneigentliche Transformationen sein können. Haben wir nämlich ein Lösungssystem t, u mit dem gemeinschaftlichen Theiler τ, so tritt derselbe Theiler auch in a, b, c, d auf. Da wir aber bei der Auf-

stellung der Transformationsgleichung $F(j'-j)=0$ nur eigentliche Transformationen berücksichtigt haben, so sind die entsprechenden Werthe von j als Wurzeln unserer Gleichung nicht mitzuzählen.

Wir wollen jetzt dazu übergehen, die Anzahl der Wurzeln von $F(jj)=0$ zu bestimmen. Zu dem Zwecke suchen wir uns die Anzahl der inaequivalenten ω, zu denen unsere j gehören. An sich gehören natürlich zu jedem j unendlich viele ω; von diesen können wir aber jedesmal ein reducirtes ω isoliren. Aus der Anzahl dieser reducirten ω wird dann die Anzahl der gesuchten j leicht folgen.

Wir haben also jetzt alle Gitter aufzusuchen, zu denen quadratische Formen $(c, d-a, b)$ gehören, deren Coeffizienten die Relation $ad-bc=n$ zu befriedigen gestatten. Zu diesem Zwecke untersuchen wir zuvör.

derst, welche Werthe die Discriminanten unserer Gitter annehmen können. Wir haben dieselben bisher mit $-\nabla u^2$ bezeichnet, wollen jetzt aber einfach $(-\nabla)$ dafür schreiben, indem wir $u = 1$ setzen, was zu keinen Irrthümern Anlaß geben wird. Natürlich können jetzt die Zahlen P, Q, R auch einen gemeinsamen Theiler haben.

Der Werth ∇ muß dann, wie gezeigt ist, so gewählt werden, daß

$$n = \frac{t^2 + \nabla}{4}$$

gemacht werden kann, d. h. es muß sein:

$$\nabla = 4 \cdot n - t^2$$

Da ∇ positiv sein muß, können wir hier für t setzen:

$$t = 0, \pm 1 \pm 2 \;\ldots\; \pm E(2\sqrt{n}).$$

Die sämmtlichen Discriminantenwerthe, zu denen unsere gesuchten Gitter gehören, sind also:

$4n, 4n-1, 4n-4, \ldots \quad 4n-[E(2\sqrt{n})]^2.$

Zu jedem Werthe von $-\nabla$ gehören nun eine Anzahl reducirter Formen (P', Q, R') [denn nur diese brauchen wir zu beachten, da wir ja nach Gittern und nicht nach Formen fragen], die uns mit Hülfe der Grösse t ein System von Coefficienten a, b, c, d zu berechnen gestatten. Wir haben nämlich:

$$a = \frac{t-Q}{2} \quad b = -R' \quad c = P' \quad d = \frac{t+Q}{2}$$

Jede reducirte Form liefert also, je nachdem $t=0$ oder $|t|>0$ ist, ein oder 2 Coefficientensysteme. Dementsprechend hat die Gleichung $F(j(\omega), j(\omega))=0$ eine einfache Wurzel im Falle $t=0$, eine doppelte im Falle $|t|>0$.

Hierbei ist abermals zu bemerken, dass sich die Gleichung $F(j', j)=0$ nur auf eigentliche Transformationen bezieht. Wir müssen daher unterscheiden zwischen solchen Wer-

then von t, für welche die Coeffici=
enten

$$\frac{t-Q}{2}, -R^c, P^c, \frac{t+Q}{2}$$

theilerfremd und zwischen solchen für welche sie theilerhaltig sind.

Wir können jetzt direkt die Anzahl der Wurzeln unserer Gleichung $F(j,j)=0$ abzählen. Wir bezeichneten früher mit $h(\nabla)$ die Zahl der primitiven, mit $H(\nabla)$ die Zahl aller Klassen quadratischer Formen, welche zur Discriminante $-\nabla$ gehören. Ausserdem führen wir noch die Bezeichnung $H'(\nabla)$ für die Anzahl derjenigen Classen (P, Q, R) der Discriminante $-\nabla$ ein, für welche die Zahlen

$$\frac{t\pm Q}{2}, P^c \text{ und } R^c$$

theilerfremd sind. Alsdann folgt aus der soeben beschriebenen Aufzählung der Verschwindungspunkte von $F(j,j)$ in der ω-Ebene, daß

ihre Anzahl gleich

$$\mathcal{H}'(4n)+2\mathcal{H}'(4n-1)+2\mathcal{H}'(4n-4)+\text{etc.}+$$
$$2\,\mathcal{H}'(4n-\mathcal{E}\sqrt{n})$$

oder kürzer geschrieben gleich

$$\sum \mathcal{H}'(4n-t^2)$$

wird, wo t die Werthe $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm 2\mathcal{E}(\sqrt{n})$ durchläuft.

Unsere Abzählung bezog sich auf den reducirten Raum der ω-Ebene. Die vorstehende Formel giebt die Anzahl derjenigen reducirten ω, für welche $F(J(\omega), j(\omega)) = 0$ ist. Wir wünschen aber vielmehr den in j gemessenen Grad der Gleichung $F(J,J) = 0$ zu kennen, d. h. die Anzahl der Wurzeln dieser Gleichung in der j-Ebene zu bestimmen. Zu diesem Zwecke müssen wir uns die conforme Abbildung des einzelnen ω-Dreiecks auf die j-Ebene gegenwärtig halten. Nach Früherem wird im Allgemeinen die Umgebung jeder Stelle ω

auf die j-Ebene eindeutig abgebildet. Nur die Punkte $\omega = i$ bez. $\omega = \rho$ liefern eine zweifache bez. eine dreifache Ueberdeckung der zugehörigen Stellen $j = 1728$ bez. $j = 0$. Ein einfacher Nullpunkt $\omega = i$ bez. $\omega = \rho$ ist daher in der j-Ebene mit der Multiplicität $\frac{1}{2}$ bez. $\frac{1}{3}$ zu rechnen. Dem Werthe $j = 1728$ entspricht die quadratische Gleichung $\omega^2 + 1 = 0$ d. h. die quadratische Form $(P, 0, P)$; andrerseits gehört zu dem Werthe $j = 0$ die quadratische Gleichung $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, d. h. die Form (P, P, P). Hiernach müssen wir sagen:

Die Anzahl der Wurzeln von $F(n, j) = 0$ in der j-Ebene ist ebenfalls gegeben durch

$$\sum H'(4n - t^2);$$

nur haben wir jetzt bei der Auswerthung dieser Summe die Classen $(P', 0, P')$ mit der Hälfte, die Classen (P, P, P) mit dem dritten Theile der zunächst sich

ergebenden Anzahlen in Rechnung zu setzen.

Wir wollen dieselbe Thatsache noch etwas anders ausdrücken, indem wir von der Riemann'schen Fläche $F(j'j) = 0$ sprechen. Auf dieser Fläche befindet sich jedes Werthepaar $(j'j)$ durch einen und nur durch einen Punkt vertreten. Wir fassen nun diejenigen Stellen in's Auge, in welchen die auf der Fläche eindeutige Function $j'-j$ verschwindet. Die Anzahl dieser (mit der richtigen Multiplicität gezählten) Stellen stimmt genau mit dem soeben bestimmten Grade der Gleichung $F(j', j) = 0$ überein.

Nach den früheren Erörterungen über das Transformationspolygon in der ω-Ebene kennen wir nämlich die Riemann'sche Fläche $F(j', j) = 0$. Dieselbe entsteht aus jenem Polygon durch Zusammenbiegen der Ränder und hat Verzweigungspunkte nur in den Stellen $j = 0$,

1728 und ∞, welche den Ecken der Fundamentaldreiecke in der ω-Ebene entsprechen. Hiernach findet sich jede von ∞, 0 und 1728 verschiedene Stelle der J-Ebene auf den verschiedenen Blättern der Riemann'schen Fläche in conformer Uebertragung vor. Haben wir also in der J-Ebene eine Wurzel der Gleichung $F(J', J) = 0$, von gewisser Multiplicität, so haben wir auf der Riemann'schen Fläche $F(J', J) = 0$ eine Verschwindungsstelle $J' - J = 0$ von derselben Multiplicität. Dies gilt zunächst unter der Voraussetzung $J \neq 0$ oder 1728; (die Stelle $J = \infty$ kommt für unsere Frage überhaupt nicht in Betracht). Betrachten wir nun die Stellen $J = 0$ und $J = 1728$. Hier ist die J-Ebene allgemein zu reden von drei bez. von zweifachen Windungspunkten unserer Riemann'schen Fläche überlagert.

Wir behaupten aber, dass an

diesen Stellen ausserdem eine Anzahl unverzweigter Blätter verlaufen und daß diese gerade die uns interessirenden Werthepaare (0,0) bez. (1728, 1728) tragen. Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus den Reihenentwickelungen von j und j' in der ω-Ebene. Wir haben einerseits für die dem Werthe $j=0$ benachbarten Werthe die Entwickelung

$$j = c_1(\omega-\rho)^3 + c_2(\omega-\rho)^6 + \cdots$$

Gleichzeitig erhalten wir durch Transformation n^{ter} Ordnung für j', falls j' mit j zusammenfällt, die folgende Entwickelung

$$j' = c_1'(\omega-\rho)^3 + c_2'(\omega-\rho)^6 + \cdots$$

Durch Elimination von ω ergiebt sich für j eine nach ganzen Potenzen von j' und ebenso für j' eine nach ganzen Potenzen von j fortschreitende Entwickelung. Dieselbe zeigt, daß dasjenige Blatt der Riemann'schen Fläche, welches die Stelle $j=0$, $j'=0$ trägt, an dieser Stelle unverzweigt ist. Das Entsprechende gilt für die Stelle $j=1728$, $j'=1728$. Hiernach ist klar, daß sich die

Nullpunkte von der j-Ebene mit ungeänderter Multiplicität auf die Riemann'sche Fläche übertragen.

Mithin hat die Function $j'-j$ auf unserer Riemann'schen Fläche soviele Nullstellen, als die Gleichung $F(j,j')=0$ in der j-Ebene Wurzeln besitzt, nämlich

$$\sum H'(4n-t^2),$$

wobei für die Berechnung dieser Summe die Bemerkungen von pg. in Kraft bleiben.

Wir schliessen hier einen kleinen Excurs über die sogenannten Kronecker'schen Classenzahlrelationen an, welche interessante Beziehungen zwischen verschiedenen zahlentheoretischen Functionen ergeben.

In unseren Endformeln werden wir wünschen, statt der Klassen-

zahlen H', deren Definition (vergl. pg. 259) eine etwas künstliche war, die Klassenzahlen H, d. h. die Anzahlen aller primitiven oder imprimitiven Classen derselben Discriminante figuriren zu sehen.

Wir erreichen dieses dadurch, dafs wir zu der bisherigen Transformationsgleichung $F(J', J)=0$ (ausführlicher geschrieben: $F_n(J', J)=0$, da es sich um alle eigentlichen Transformationen n^{ter} Ordnung handelt) die sämmtlichen Gleichungen

$$F_{\frac{n}{\tau}}(J', J)=0,$$

wo τ die sämmtlichen quadratischen Theiler von n durchläuft, hinzunehmen. Jede einzelne dieser Gleichungen liefert die <u>eigentlichen Transformationen von der Ordnung $\frac{n}{\tau}$</u> oder wie wir sagen können, die <u>un</u>-

eigentlichen Transformationen n^{ter} Ordnung mit dem gemeinsamen Factor τ. Alle Werthe von j, welche bei diesen uneigentlichen Transformationen in sich übergehen, werden durch die Gleichung

$$F_{\frac{n}{\tau^2}}(j, j) = 0$$

erhalten. Mithin bekommen wir die Gesammtheit aller Werthe j, welche bei den eigentlichen und uneigentlichen Transformationen n^{ter} Ordnung ungeändert bleiben, aus der Gleichung

$$\prod_{(\tau)} F_{\frac{n}{\tau^2}}(j, j) = 0.$$

Der Grad dieser Gleichung ergiebt sich sofort aus dem Grade von $F_n(j, j) = 0$. Da der letztere gleich $\sum H'(4n - t^2)$ war, so wird der erstere ersichtlich

gleich

$$\underline{\sum H(4n-t^2).}$$

Wir haben nämlich jetzt einfach die Nichttheilbarkeitsbedingung von pg. 259 unberücksichtigt zu lassen, und dementsprechend H' durch H zu ersetzen.

Diese Formel bedarf einer Ergänzung, wenn n eine reine Quadratzahl ist. In diesem Falle müssen wir jedenfalls festsetzen dass bei der Bildung unserer Gleichung $\prod_\tau F_{\frac{n}{\tau^2}}(J, j) = 0$ nur solche Zahlen τ benutzt werden, welche kleiner als $(\sqrt{n})$ sind. Wollten wir nämlich $\tau = \sqrt{n}$ setzen, so würde in unserer Gleichung der Factor

$$F_1(J, j)$$

vorkommen, welcher da j bei beliebigen Transformationen erster Ordnung ungeändert bleibt, identisch verschwinden würde.

Dementsprechend werden wir auch bei der Berechnung von

$\sum H(4n-t^2)$ diejenigen Classen (P, Q, R) nicht mitzählen dürfen, welche bei einer Transformation erster Ordnung ungeändert bleiben. Die Discussion der Pell'schen Gleichung, die jetzt auf die gewöhnliche Form

$$\frac{t^2 + Du^2}{4} = 1$$

zurückkommt, zeigt dass in unserer Summe 3 solche Classen vorkommen, nämlich $u = 1$, $D = 3$, $t = \pm 1$ und $u = 1$, $D = 4$, $t = 0$. Ersichtlich liefern die beiden ersten Lösungen als zugehörige Invariante $j = 0$, die dritte $j = 1728$; zu dem Werthe $\sum H$ würden die beiden ersten nach unserer früheren Verabredung $2/3$, die dritte $1/2$ Einheiten beitragen. Diesen Betrag haben wir also in Abzug zu bringen. Mithin wird der Grad der Gleichung $\Pi F = 0$, im Falle n ein vollständiges Quadrat ist, gleich

$$\sum H(4n-t^2) - 7/6.$$

Die somit bestimmte Anzahl berechnen wir jetzt noch auf eine zweite Weise. Wir knüpfen dabei an die Riemann'sche Fläche an, welche zu der Gleichung $\Pi F(j'j)=0$ gehört. Diese Fläche besteht aus der Ueberlagerung einer Reihe einzelner Riemann'scher Flächen, welche bez. durch die Gleichung $F_{\frac{n}{t^2}}(j'j)=0$ gegeben sind und deren Character wir pg. 262 ff studirt haben. Die fragliche Anzahl ist nun gleich der Zahl der Verschwindungspunkte von $j'-j$ auf der so entstehenden Gesammtfläche. Andrerseits wissen wir aus der Functionentheorie, daß die Zahl der Verschwindungspunkte einer algebraischen Function gleich ist der Zahl ihrer Unendlichkeitspunkte. Die Unendlichkeitsstellen von $j'-j$ liegen sämmtlich bei $j=\infty$; ihre Anzahl sowie ihre Vertheilung auf die verschiedenen Blätter der Fläche lassen sich aus den bekannten

nach $u = e^{2i\pi\omega}$ fortschreitenden Reihen von j' ablesen. Es ergiebt sich als Resultat, wie wir hier nur historisch anführen:

Die Anzahl der bei $j = \infty$ in den verschiedenen Blättern liegenden Unendlichkeitsstellen beträgt

1. Wenn n keine Quadratzahl ist:

$$\Phi(n) + \Psi(n),$$

2. wenn aber n gleich dem Quadrat einer ganzen Zahl ist:

$$\Phi(n) + \Psi(n) - 1.$$

Hier verstehen wir unter $\Phi(n)$ die Theilersumme von n, so daß, unter δ einen beliebigen Theiler von n verstanden,

$$\Phi(n) = \Sigma\, \delta$$

wird. Ferner wird

$$\Psi(n) = \Sigma\, \delta' - \Sigma\, \delta'',$$

wo δ' bez. δ'' diejenigen Theiler

zu durchlaufen haben, welche grösser bez. kleiner als $\sqrt{n}$ sind.

Durch Vergleich unserer Formeln für die Null- und Unendlichkeitsstellen kommen wir zu der folgenden merkwürdigen Relation:

1. <u>im Falle eines allgemeinen n:</u>

$$H(4n) + 2H(4n-1) + 2H(4n-4) + \dots$$
$$2H(4n-t^2) = \Phi(n) + \Psi(n). \; [t = 2E(|\sqrt{n}|)].$$

2. <u>im Falle eines quadratischen n:</u>

$$H(4n) + 2H(4n-1) + 2H(4n-4) + \dots 2H(4n-t^2)$$
$$-1/6 = \Phi(n) + \Psi(n) - 1. \; [t = 2\sqrt{n} - 1].$$

Wir bezeichnen diese Relationen als <u>Classenzahlrelationen erster Stufe</u>, im Gegensatz zu den Classenzahlrelationen höherer Stufe, welche wir später kennen lernen werden. Die letzteren werden wir aus den Invarianten der höheren Stufen ähnlich ableiten, wie die vorstehenden aus der Invariante J.

Unsere Relationen sind zuerst von <u>Kronecker</u> im Jahre 1858 aufge-

stellt; später sind sie ins Besondere von Gierster entwickelt worden. Vergl. hierzu die historischen Bemerkungen in Kolulf. II, Abschn. 4, Cap. 5 und 6 pg. 160 ff.

Das Interesse der Klassenzahlrelationen besteht in erster Linie darin, dass sie die complicirte zahlentheoretische Function H mit den elementaren Functionen Φ und Ψ in Beziehung setzt und die erstere aus den letzteren zu berechnen gestattet.

Zu den beiden soeben unterschiedenen Fällen (n allgemein und n quadratisch) geben wir je ein numerisches Beispiel.

1. n = 12.

Die linke Seite unserer Relation besteht aus den Termen:

$$H(48) + 2H(47) + 2H(44) + 2H(39) + 2H(32) + 2H(23) + 2H(12).$$

Die Zahlen H reduciren wir zunächst durch Abspalten der quadratischen Theiler auf die Zahlen h. So ergiebt sich z. B.

$\mathcal{H}(48) = h(48) + h(12) + h(3)$.

Die Zahlen h ihrerseits entnehmen wir aus den Cayley'schen Tabellen, wobei wir nur berücksichtigen müssen, daß nach unserer Verabredung die Anzahl der Classen $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}, \mathfrak{P})$ bez. $(\mathfrak{P}, 0, \mathfrak{P})$ mit $1/3$ bez. $1/2$ zu multipliciren ist.

In solcher Weise finden wir:

$$\mathcal{H}(48) = h(48) + h(12) + h(3) = 2 + 1 + 1/3$$
$$2\mathcal{H}(47) = 2h(47) = 10$$
$$2\mathcal{H}(44) = 2h(44) + 2h(11) = 6 + 2$$
$$2\mathcal{H}(39) = 2h(39) = 8$$
$$2\mathcal{H}(32) = 2h(32) + 2h(8) = 4 + 2$$
$$2\mathcal{H}(23) = 2h(23) = 6$$
$$2\mathcal{H}(12) = 2h(12) + 2h(3) = 2 + \tfrac{2}{3}$$

In Summa $= 44$.

Andererseits haben wir

$$\Phi(12) = 12 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$$
$$\Psi(n) = 12 + 6 + 4 - 3 - 2 - 1 = 16$$

In Summa 44

2. $n = 16.$

Hier haben wir zunächst zu berechnen

$$H(64) + 2H(63) + 2H(60) + 2H(55)$$
$$+ 2H(48) + 2H(39) + 2H(28) + 2H(15).$$

Aus den Cayley'schen Tabellen ergiebt sich mit Rücksicht auf unsere Verabredungen:

$$H(64) = h(64) + h(16) + h(4) = 2 + 1 + 1/2$$
$$2H(63) = 2h(63) + 2h(7) = 8 + 2$$
$$2H(60) = 2h(60) + 2h(15) = 4 + 4$$
$$2H(55) = 2h(55) = 8$$
$$2H(48) = 2h(48) + 2h(12) + 2h(3) = 4 + 2 + 2/3$$
$$2H(39) = 2h(39) = 8$$
$$2H(28) = 2h(28) + 2h(7) = 2 + 2$$
$$2H(15) = 2h(15) = 4$$

In Summa $52\ 1/6$

Die linke Seite der Klassenzahlrelation beträgt daher wegen des Subtrahenten $7/6$: $\underline{51.}$

Andererseits wird

$$\Phi(n) = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 \qquad = 31$$
$$\Psi(n) - 1 = 16 + 8 \qquad - 2 - 1 - 1 \qquad = 20$$

Die rechte Seite unserer Relation giebt also wirklich gleichfalls

$$31 + 20 = \underline{51}.$$

Nach diesem Excourse kehren wir zu der Gleichung $F(j, j') = 0$ zurück. Wir haben pg. 258 die Wurzeln dieser Gleichung in eine Reihe von Kategorien gespalten, je nach den zugehörigen Werthen der Discriminante $-\nabla$. Die bezüglichen Werthe waren

$$\nabla = 4n\ ,\ 4n-1\ ,\ 4n-4,\ \text{etc.}$$

Die Wurzeln der 1ten (zu $\nabla = 4n$) gehörigen Kategorie waren einfache, die der übrigen doppelte Wurzeln unserer Gleichung.*) Wir werden uns nun die linke Seite von $F(j, j') = 0$

---

*) Hierbei ist der Kürze halber von der etwaigen Multiplicität der Wurzeln $j = 0$ und $j = 1728$ abgesehen.

in ebenso viele Bestandtheile gespalten denken, als es unterschiedene Kategorien giebt. Wir können etwa schreiben:

$$1)\ F(j,j) = X'_{4n}(j) \cdot [X'_{4n-1}(j)]^2 \cdot [X'_{4n-4}(j)]^2 \cdot [\ldots].$$

Der Grad des einzelnen Bestandtheiles in j beträgt nach pag. 259 bez.

$$H'(4n),\ H'(4n-1),\ H'(4n-4), \ldots$$

Neben den Ausdrücken X' führen wir sogleich gewisse ähnlich gebaute Ausdrücke X und χ ein, welche zu H und h in demselben Verhältniß stehen wie X' zu H'! Es soll nämlich $X_\nabla(j)$, gleich Null gesetzt, alle diejenigen in der Anzahl H vorhandenen Invarianten primitiver oder imprimitiver Classen liefern, welche zur Discriminante $-\nabla$ gehören. Ebenso soll $\chi_\nabla(j) = 0$ die in der Anzahl h vorhande-

nen Invarianten primitiver Classen von der Discriminante $-\nabla$ bestimmen. Die Gleichung $\chi_\nabla(j)=0$ bez. $X_\nabla(j)=0$ werden wir als (primitive bez. imprimitive) <u>Classengleichung</u> bezeichnen.

Natürlich steckt χ_∇ im X'_∇ und dieses im X_∇ als ein Factor.

Unser Ziel soll es nun sein, durch Benutzung der zu den verschiedenen Werthen von n gehörigen Gleichungen $F_n(j, j')=0$ für jedes ∇ eine Classengleichung $\chi_\nabla(j)=0$ zu isoliren. Das Hauptresultat dieser Untersuchung wird folgendes sein. Die <u>Classengleichung ist ebenso wie die Transformationsgleichung eine ganzzahlige algebraische Gleichung, deren höchster Coefficient der Einheit gleichkommt.</u>

Zuvörderst wollen wir an der Gleichung 1) eine kleine Vereinfachung vornehmen. Wir wollen nämlich rechts und links diejenigen

Factoren fortheben, welche zu den Discriminanten $-\nabla = -3$ und $-\nabla = -4$ gehören, oder zu solchen Discriminanten, die sich von -3 und -4 nur um einen quadratischen Factor unterscheiden. Die entsprechenden Werthe von j sind $j = 0$ und $j = 1728$. Diese Werthe von j machten uns früher bei der Abzählung des Grades der Transformationsgleichung Schwierigkeiten, überdies interessiren sie uns jetzt nicht mehr, insofern wir uns mit der Gleichung $X_\nabla(j) = 0$ beschäftigen wollen. Die in solcher Weise durch Forthebung der Factoren (j) und $(j - 1728)$ vereinfachte Gleichung mögen wir etwa die „gereinigte Transformationsgleichung" nennen.

Wir führen nun den Nachweis, daß wir die einzelne Classengleichung $X_\nabla(j)$ stets mittelst rationaler Processe aus unseren gereinigten Transformati-

ansgleichungen herstellen können. Wir wollen zu dem Zweck voraussetzen, dass dies bereits für alle $\nabla \leqq 4n-4$ geschehen sei, und werden jetzt beweisen, dass wir dann auch die Classengleichungen für $\nabla = 4n-1$ und $\bar{\nabla} = 4n$ rational berechnen können. Wir bilden:

$$\mathfrak{F}_{4n}(\mathfrak{J}\mathfrak{J}) = X'_{4n}(\mathfrak{J})\,[X_{4n-1}(\mathfrak{J})]^2 \cdot [X'_{4n-4}(\mathfrak{J})]^2 .$$

Hier sind, wie man sofort aus unserer Annahme schliesst, alle Factoren von $[X'_{4n-4}(\mathfrak{J})]^2$ an rational bekannt, wir können daher

$$X'_{4n}(\mathfrak{J})\,[X'_{4n-1}(\mathfrak{J})]^2$$

durch einfache Division berechnen.

Stellt man jetzt die grossen X' durch die kleinen χ dar und ordnet die letzteren nach der Grösse der zu-

gehörigen Determinanten, so werden die Anfangsglieder des letzten Produktes offenbar $X_{4n}(X_{4n-1})^2$. Was noch folgt, sind lauter Factoren x_i für kleinere Determinanten. Da wir diese als rational bekannt angesehen haben, können wir sie einfach fortlassen; es ist somit auch das Produkt

$X_{4n}(X_{4n-1})^2$ rational herstellbar.

Bemerken wir jetzt noch, dass die Gleichung X_{4n} keine Doppelwurzel besitzt, so ergiebt sich nach bekannten Sätzen der Gleichungstheorie sofort, dass man aus dem Produkt $X_{4n}(X_{4n-1})^2$ rational die Factoren X_{4n} und X_{4n-1} abspalten kann, was wir zeigen wollten.

Um unseren Beweis vollständig zu machen, zeigen wir jetzt noch, dass X_8 und X_7 rational berechnet werden können. Bilden wir nämlich $F_2(J, J)$, so ergiebt sich:

$$F_2(J,J) = X_8'(J) \cdot [X_7'(J)]^2,$$

indem wir die Determinanten -4, -3 unberücksichtigt lassen. Nun ist weiter:

$$X_8'(j) = X_8(j), \quad X_7'(j) = X_7(j),$$

immer unter der Voraussetzung, dass wir $X_4(j)$ und $X_3(j)$ unterdrücken.

Es folgt also:

$$\mathfrak{F}_2(j, j) = X_8(j) \left[X_7(j)\right]^2.$$

Damit ist aber gezeigt, dass $X_8(j)$ und $X_7(j)$ rational berechnet werden können. Uebrigens sind $X_8(j) = 0$ und $X_7(j) = 0$ sogar Gleichungen ersten Grades, also die zugehörigen j rational, da sowohl für $\nabla = 8$ wie für $\nabla = 7$ nur eine Classe existirt.

Wir gewinnen so ganz allgemein das Resultat:

<u>Die Gleichung h^{ten} Grades $X_\nabla(j) = 0$ welche die h zur Discriminante $-\nabla$ gehörigen singulären j bestimmt, ist eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten.</u>

Wir behaupten aber ferner:
Der Coefficient des höchsten Gliedes in dieser Gleichung ist gleich 1.

Der Beweiss lässt sich so führen, daß man zunächst zeigt: Das höchste Glied der Gleichung $F(j, j) = 0$ hat zum Coefficienten die Einheit. Dies gelingt in der Weise, daß man sich das Bildungsgesetz der Coefficienten von $F(j', j)$ aus den Reihenentwickelungen von j und j' nach Potenzen von r klar macht. Zunächst erkennt man, solange n kein volles Quadrat ist, daß der höchste Coefficient an sich gleich 1 wird. Ist aber n ein volles Quadrat, so wird der höchste Coefficient zwar gleich $\sqrt{n}$; gleichzeitig nehmen aber auch alle übrigen Coefficienten den Factor $\sqrt{n}$ an, so daß wir nach Forthebung desselben wieder als ersten Coefficienten die Eins übrig behalten. —

Bei der Zerlegung der Gl. $F = 0$ in die einzelnen Theilgleichungen

$x=0$ geht nun offenbar die Eigenschaft, die Einheit zum höchsten Coefficienten zu haben, auf alle Theilgleichungen über.

Es ist dies hier nicht weiter auszuführen, weil es algebraisch ganz einfach ist.

Wir mögen dieses Resultat so ausdrücken, dass wir sagen:

Die h singulären Werthe von J sind nicht nur algebraische Zahlen schlechtweg, sondern sie sind ganze algebraische Zahlen. –

Das Verfahren, welches wir bei der Aufstellung der Classengleichung befolgten, ist allerdings ein rein theoretisches. Für die numerische Durchführung wäre es sehr unpraktisch, von der Transformationsgleichung des J seinen Ausgang zu nehmen, weil die Gleichung, wie wir sahen, schon für kleine Transformationsgrade ungeheuer complicirt ist. Hier treten die Moduln höherer Stufe in ihr Recht, wie weiter unten

noch näher auszuführen.

Wir theilen die Classengleichung für die allereinfachsten Fälle

$$\nabla = 3, 4, 7, 8$$

im Anschlusse an Weber mit. In den beiden ersten Fällen lautet sie natürlich

$$j = 0 \text{ und } j - 1728 = 0.$$

Auch in den beiden folgenden Fällen ist noch $h = 1$. Man findet hier als Classengleichung:

$$j + 3375 = 0 \text{ bez. } j - 8000 = 0.$$

23. VII. 96. Unsere nächste Aufgabe soll es jetzt sein, die Classengleichung $X_\nabla = 0$ näher zu studiren.

Im Allgemeinen kann man bei der Untersuchung einer algebraischen Gleichung zwei verschiedene Gesichtspunkte verfolgen. Man kann sich entweder die Aufgabe stellen, die Wurzeln der Gleichung zu separiren, sie numerisch mit vorgegebener Genauigkeit zu berechnen;

im Anschlusse hieran wird man die Frage entscheiden, wie viele Wurzeln reell werden etc. Andrerseits kann man die Gleichung daraufhin untersuchen, ob sie durch Wurzelzeichen lösbar ist oder, wenn dieses nicht der Fall ist, welches die einfachsten Irrationalitäten sind, mit deren Hülfe die Gleichung sich reduciren lässt. Die erste Art der Fragestellung bezeichnet man wohl als die numerische, die zweite als die algebraische Auflösung der Gleichungen.

Was die erstere Art der Untersuchung betrifft, so ist dieselbe bei unserer Classengleichung eigentlich schon implicite erledigt. Indem wir die zu der vorgelegten Discriminante $-\nabla$ gehörigen reducirten Formen $p\omega^2 + q\omega + r$ aufzählen, bekommen wir durch Nullsetzen derselben eine Anzahl von Punkten ω in dem reducirten

Dreiecke der Modultheilung. Die Trennung der Wurzeln unserer Gleichung ist damit geleistet. Von den Werthen ω kommen wir mittelst der bekannten Potenzentwickelungen zu den zugehörigen Werthen von J. Diese lassen sich hiernach mit beliebiger Genauigkeit numerisch berechnen. Auch die Frage nach der Realität der Wurzeln erledigt sich leicht. Es fallen nämlich diejenigen und nur diejenigen Werthe von J auf die reelle Axe der J-Ebene, deren zugehörige ω-Werthe auf der Begrenzung bez. der Mittellinie des reducirten Dreiecks liegen. Diese entsprechen bekanntermassen den Anceps-Formen. Wir haben also unter den Wurzeln der Classengleichung soviel reelle Werthe, als es Ancepsclassen der Discriminante $-\nabla$ giebt.

Gehen wir nun zu der zweiten Art der Betrachtung über. Wir

haben in dieser Hinsicht das einfache Resultat zu beweisen:

Unsere Classengleichung ist im Rationalitätsbereiche $V - \nabla$ eine Abel'sche Gleichung.

Bekanntlich heisst eine Gleichung dann eine Abel'sche Gleichung, wenn jede Wurzel rational durch jede andere ausgedrückt werden kann und wenn die rationalen Operationen, durch welche man von einer Wurzel zu einer beliebigen anderen übergeht, gegen einander vertauschbar sind.

In unserem Falle wird sich sogar noch etwas Weiteres ergeben: Die Form der rationalen Function, welche aus j_α eine andere Wurzel $j_{\alpha+\beta}$ entstehen lässt, hängt lediglich von dem Werthe β ab und ist für alle Werthe von α dieselbe. Wir können dieses so ausdrücken, dass wir schreiben:

$$j_{\alpha+\beta} = R_\beta (j_\alpha).$$

Dieser Umstand lässt einen interessanten Schluss auf die Gruppe unserer Gleichung zu. Dieselbe ist natürlich erstens eine Abel'sche Gruppe, d.h. eine Gruppe vertauschbarer Operationen. Zweitens aber erkennen wir, dass sie mit der Gruppe der Composition genau parallel läuft (ihr „isomorph" ist). Der Uebergang von f_α zu $f_{\alpha+\beta}$ wird nämlich in der Gittersprache dadurch bewerkstelligt, dass wir das Gitter G_α mit dem Gitter G_β multipliciren, wobei sich das Gitter $G_{\alpha+\beta}$ ergiebt. Die Multiplication mit G_β hat also auf die Wurzeln f_α der Classengleichung denselben Einfluss, wie die rationale Operation R_β. In beiden Fällen besteht die charakteristische Eigenschaft, dass sich die Indices α und β einfach additiv aneinander reihen. Wir kommen also zu dem merkwürdigen Ergebniss:

<u>Die ursprünglich zahlentheoretisch definirte Gruppe der Composition gewinnt bei der Classengleichung eine algebraische Bedeutung.</u>

Um die vorstehenden Behauptungen zu beweisen, haben wir nur die Richtigkeit der Gleichung

$$J_{\alpha+\beta} = \mathcal{R}'_{\beta}(J_{\alpha})$$

darzuthun. Ist nämlich gezeigt, daß jede Wurzel in solcher Weise durch eine rationale Operation aus jeder anderen erhalten werden kann, so ergiebt sich die Vertauschbarkeit dieser rationalen Operationen von selbst. In der That wird dann

$$\mathcal{R}'_{\gamma}(\mathcal{R}_{\beta}(J_{\alpha})) = J_{(\alpha+\beta)+\gamma} = J_{(\alpha+\gamma)+\beta} = \mathcal{R}'_{\beta}(\mathcal{R}_{\gamma}(J_{\alpha})).$$

Wir stützen uns beim Beweise in erster Linie wieder auf die <u>Transformationsgleichung</u>. Während wir aber bisher solche Transformationsgrade n herangezogen, welche sich im Hauptgitter zerlegen

liessen, benutzen wir jetzt Transformationsgrade, welche in das Produkt zweier im Nebengitter G_β bez. $G_{-\beta}$ befindlicher Zahlen ν und $\bar{\nu}$ zerfallen. Hinsichtlich der Wurzeln unserer Transformationsgleichung ergiebt sich daraus folgende Umänderung der Fragestellung. Wir haben früher nach denjenigen Werthen j' gefragt, welche mit j_α identisch sind, entsprechend der Annahme, dass n in zwei Hauptzahlen zerlegt werden kann und mit Rücksicht darauf, dass bei der Multiplication mit einer Hauptzahl das zu dem Werthe von j_α gehörige Gitter ungeändert bleibt. Wir werden jetzt nach denjenigen Werthen j' fragen, welche nicht direkt gleich j_α, sondern gleich $j_{\alpha \pm \beta}$ sind; da nämlich die Zahlen ν und $\bar{\nu}$ den Nebengittern G_β und $G_{-\beta}$ angehören sollen, wird sich das Gitter G_α bei der complexen Multiplication mit ν und $\bar{\nu}$ je

in ein Gitter verwandeln, welches in das Gitter $G_{\alpha+\beta}$ bez. $G_{\alpha-\beta}$ eingelagert ist, so dass J_α in $J_{\alpha\pm\beta}$ übergeht.

Übrigens werden wir beim Beweise nur Primzahlgrade der Transformation benutzen. Wir sind dadurch einer Reihe von Fallunterscheidungen überhoben, welche bei zusammengesetzten Transformationsgraden die Betrachtung erschweren. Indessen hat diese Beschränkung auch einen Nachtheil. Wir werden nämlich mit unserem Beweise nur dann durchkommen, wenn wir den Satz benutzen, dass in jedem unserer h Gitter Primzahlen π vorkommen. Der Beweis dieses Satzes erfordert höhere Betrachtungen und ist von Weber geliefert worden. Wir müssen hier den Satz als bewiesen übernehmen*)

*) Dieses ist aber, wie wir wiederholen, nur ein Mittel zur Abkürzung der Darstellung. Wir können auch ohne den Weber'schen Satz durchkommen, indem wir solche zusammengesetzte Transformationsgrade n betrachten, die sich im Gitter G_β, $G_{-\beta}$ zerlegen.

Der Transformationsgrad p soll in unserer Normalfigur die Zerlegung

$$p = \pi . \bar{\pi}$$

gestatten. Die Zahl π gehöre dem von dem Hauptgitter verschiedenen Gitter G_β an, so daß $\beta \neq 0$ ist. Wir können die folgenden drei Fälle unterscheiden:

1.) $\pi = \bar{\pi}$ und $G_\beta = G_{-\beta}$

2.) $\pi \neq \bar{\pi}$ „ $G_\beta = G_{-\beta}$

3.) $\pi \neq \bar{\pi}$ „ $G_\beta \neq G_{-\beta}$.

In den beiden ersten Fällen ist G_β ein Ancepsgitter u. zw. befindet sich im Falle 1.) der Punkt $(\pi, \bar{\pi})$ auf einer Symmetrielinie des Ancepsgitters, im Falle 2.) in einer beliebigen Ecke desselben. Im dritten Falle ist G_β kein Ancepsgitter.

Betrachten wir nun die zur Zahl p gehörige Transformationsgleichung

$$F_p(J', J) = 0.$$

Unter den $p+1$ Wurzeln J' befinden sich die Werthe $J' = J\alpha + \beta$ und

$j' = j\alpha - \beta$. Es sind dieses nach pg. 230 zugleich die einzigen Werthe von j' welche mit einer Wurzel j der Classengleichung $X^r\nabla = 0$ übereinstimmen können. Hieraus ergeben sich für die 3 unterschiedenen Fälle nachstehende Folgerungen.

1.) Im Falle 1.) ist eine Wurzel der Transformationsgleichung bekannt, nämlich

$$j' = j\alpha + \beta = j\alpha - \beta.$$

Dieselbe kann in rationeller Weise als gemeinsame Wurzel der beiden Gleichungen

$$F_{p}(j', j\alpha) = 0, \; X^r\nabla(j') = 0$$

nach der Methode des grössten gemeinsamen Theilers berechnet werden. Wir erhalten

$$j' = j\alpha \pm \beta = R^{c}(j\alpha).$$

Die Gestalt der rationalen Function R hängt natürlich in keiner Weise davon ab, welchen der

Werthe $J = J\alpha$ wir in die Transformationsgleichung eingesetzt haben. Der Index α kommt nur in dem Argumente von R zum Ausdrucke. Die Coefficienten von F und also die von R bestimmen sich (ausser durch den Werth der Discriminante $-\nabla$) nur durch die Zahl π, oder wie wir sagen können, durch den Index β desjenigen Gitters, in welchem π liegt. Benutzt man verschiedene π desselben Index β, so wird man allemal auf dasselbe $J\alpha \pm \beta$ geführt, so daß die entstehenden rationalen Functionen $R(J\alpha)$ numerisch übereinstimmen. Wir mögen daher die vorstehende Formel ausführlicher folgendermassen schreiben:

$$\text{II}\quad J\alpha \pm \beta = R^{\,}\beta(J\alpha).$$

2.) Im Falle 2.) giebt es <u>zwei verschiedene</u> Transformationen p^{ter} Ordnung, welche auf <u>densel-</u>

ben Werth

$$J' = J_{\alpha} \pm \beta$$

führen. In Folge dessen hat die Gleichung $F(J', J_{\alpha}) = 0$ jetzt eine Doppelwurzel. Diese kann direkt aus der Gleichung $F = 0$ oder (falls es ausser dieser noch andere Doppelwurzeln geben sollte) mit Hinzuziehung der Gleichung $X_{\nabla}(J') = 0$, in rationaler Form als Function von J_{α} berechnet werden.

Der Werth dieser Function hängt nur von dem Index β ab. Wir haben also auch in diesem Falle

$$J_{\alpha} \pm \beta = R_{\beta}(J_{\alpha}).$$

In den bisher betrachteten Fällen 1.) und 2.) haben wir keinen Grund gehabt, den natürlichen Rationalitätsbereich zu erweitern. Die Coefficienten von R ergeben sich als gewöhnliche ganze Zahlen.

3.) Wir kommen nun zu dem

allgemeinen Falle 3.). Hier existiren zwei verschiedene Wurzeln

$$z' = z_{\alpha+\beta} \text{ und } z' = z_{\alpha-\beta},$$

welche den beiden Gleichungen

$$F(z' z_\alpha) = 0 \text{ und } X_\nabla(z') = 0$$

gemeinsam sind. Das Euklidische Verfahren liefert hier zur Bestimmung von $z_{\alpha+\beta}$ und $z_{\alpha-\beta}$ eine quadratische Gleichung. Hier sind also nicht $z_{\alpha+\beta}$ und $z_{\alpha-\beta}$ selbst, sondern nur die symmetrischen Functionen dieser Grössen rational bekannt. Wir haben etwa:

$$z_{\alpha+\beta} + z_{\alpha-\beta} = R'_\beta(z_\alpha)$$

$$z_{\alpha+\beta} \cdot z_{\alpha-\beta} = R''_\beta(z_\alpha).$$

Die Coefficienten der Functionen R' und R'' hängen nur von β ab und sind gewöhnliche ganze Zahlen. Die vorstehenden Gleichungen mögen wir etwas um-

bestimmter folgendermassen schreiben:

$$J\alpha+\beta = R^{i}_{\beta}\,(J\alpha,\, J\alpha-\beta).$$

Wie man sieht, führt die Transformationsgleichung in diesem allgemeinen Falle nicht völlig zum Ziele. Wir müssen daher zu neuen Hülfsmitteln unsere Zuflucht nehmen. Diese liefert uns die Multiplicatorgleichung:

$$\phi(M, J) = 0, \text{ wo } M = p\sqrt[12]{\frac{\Delta'}{\Delta}}.$$

Zunächst ändern wir dieselbe ein wenig ab. Wie pg. 66 erwähnt, sind ihre Coefficienten nicht immer im natürlichen Rationalitätsbereiche enthalten. Stellen wir aber eine entsprechende Gleichung für

$$M^{12} = p^{12}\,\frac{\Delta'}{\Delta}$$

auf, so erhalten wir eine Gleichung

$$\Psi(M^{12}, J) = 0,$$

deren Coefficienten unter allen Umständen rationale ganze Zahlen sind.
Andererseits lässt sich $\mathcal{M}^{12}$ rational und ganzzahlig durch die entsprechenden Werthe von J und J' ausdrücken (wenigstens, solange J' nicht Doppelwurzel der Gleichung $F(J', J) = 0$ ist, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll.) In dem uns interessirenden Falle 3.) können wir also jedenfalls setzen:

$$\mathcal{M}^{12}_{\alpha+\beta} = Rat(J_{\alpha+\beta}, J_\alpha)$$

$$\mathcal{M}^{12}_{\alpha-\beta} = Rat(J_{\alpha-\beta}, J_\alpha).$$

denn die Wurzeln $J_{\alpha+\beta}$, $J_{\alpha-\beta}$ sind im vorliegenden Falle nach pg. 230 einfache Wurzeln der Transformationsgleichung.
Hiermit ist allerdings zunächst noch nichts gewonnen; denn die Indices $+\beta$ und $-\beta$ erscheinen hier wieder gleichberechtigt neben

einander. Wir können aber nach pg. 232 noch eine zweite Darstellung für die Grössen $\mathcal{H}_{\alpha+\beta}$ und $\mathcal{H}_{\alpha-\beta}$ geben, nämlich

$$\mathcal{H}^{12}_{\alpha+\beta} = \bar{\pi}^{12}\,\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_{\alpha}},$$

$$\mathcal{H}^{12}_{\alpha-\beta} = \pi^{12}\,\frac{\Delta_{\alpha-\beta}}{\Delta_{\alpha}}.$$

Indem diese Gleichungen sich durch die Factoren π^{12} bez. $\bar{\pi}^{12}$ unterscheiden, geben sie uns ein Mittel den Index $+\beta$ von dem Index $-\beta$ zu trennen.

24.VII.96. Dies wird folgendermassen bewerkstelligt werden. Wir schreiben die vorstehenden Gleichungen:

$$1.)\quad \bar{\pi}^{12}\,\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_{\alpha}} = \bar{R}_1(J_{\alpha+\beta}, J_{\alpha}).$$

Hier vertauschen wir α mit $\alpha+\beta$, worauf die rechte Seite übergeht in $\bar{R}_1(J_{\alpha+2\beta}, J_{\alpha+\beta})$. Nach einer Bemerkung von pg. 298 aber wird

nun

$$J_{\alpha+2\beta} = R_\beta(J_{\alpha+\beta}, J_\alpha),$$

so daß der Ausdruck $R'(J_{\alpha+2\beta}, J_{\alpha+\beta})$ geschrieben werden kann als eine rationale Funktion von $J_{\alpha+\beta}$ und J_α.

Wir können also die folgende Gleichung anschreiben:

$$2.)\ \pi^{12}\frac{\Delta_{\alpha+2\beta}}{\Delta_{\alpha+\beta}} = R'_2(J_{\alpha+\beta}, J_\alpha).$$

In derselben Weise gewinnen wir aus 2)

$$3.)\ \pi^{12}\frac{\Delta_{\alpha+3\beta}}{\Delta_{\alpha+2\beta}} = R'_3(J_{\alpha+\beta}, J_\alpha)\ \text{etc.}$$

Wir erhalten so eine Kette von Gleichungen. Nach der Compositionstheorie muß sich dieselbe schliessen. Ist nämlich k der Exponent, welcher zu dem Gitter G_β gehört (vergl. pg 146), so haben wir

$$J_{\alpha+k\beta} = J_\alpha,\quad \Delta_{\alpha+k\beta} = \Delta_\alpha.$$

In Folge dessen lautet die letzte unserer Gleichungen

$$k)\ \pi^{12}\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_{\alpha+(k-1)\beta}} = R'_k(J_{\alpha+\beta}, J_\alpha).$$

Durch Multiplication der Gleichungen 1.) 2.) . . . k) ergiebt sich

$$a)\ \pi^{12k} = R'_1 . R'_2 \ldots R'_k(J_{\alpha+\beta}, J_\alpha).$$

In derselben Weise findet man

$$b)\ \pi^{12k} = R'_1 . R'_2 \ldots R'_k(J_{\alpha-\beta}, J_\alpha).$$

Die beiden Gleichungen a) und b) halten wir nun mit der quadratischen Gleichung zusammen, welche zwischen $J_{\alpha+\beta}$ und $J_{\alpha-\beta}$ besteht.

Dieselbe hat mit a) die eine, mit b) die andere Wurzel gemein. Bestimmen wir also den grössten gemeinsamen Theiler zwischen dieser Gleichung und a) bez. b), so erhalten wir $J_{\alpha+\beta}$ bez. $J_{\alpha-\beta}$ als rationale Function von J_α. Die Coefficienten dieser Function sind

von dem Index α unabhängig, da dieses sowohl für die quadratische Gleichung als für die Functionen $R'_1, R'_2 \dots R'_k$ gilt. Wir können also wiederum schreiben

$$j_{\alpha+\beta} = R'_\beta(j_\alpha) \text{ bez. } j_{\alpha-\beta} = R'_{-\beta}(j_\alpha).$$

Die Coefficienten sind aber nicht mehr, wie früher ganze Zahlen. Vielmehr gehen in dieselben die Irrationalitäten π^{nk} bez. π'^{nk} ein. Da k der zum Gitter G_β gehörige Exponent ist, so werden π^k und π'^k Hauptzahlen. Dasselbe gilt von den Coefficienten von R_β und $R_{-\beta}$. Diese sind ganze Zahlen nicht im natürlichen sondern in dem durch $\sqrt{-\nabla}$ erweiterten Rationalitätsbereiche.

Hiermit ist der pag. 288 begonnene Beweis für alle Fälle erbracht. Wir haben gesehen, daß die Formel

$$j_{\alpha+\beta} = R'_\beta(j_\alpha)$$

allemal statthat, wenn es eine Primzahl p giebt, welche in dem

Gitter G_β zerlegbar ist. Nehmen wir schliesslich noch den pg. 292 erwähnten Satz von Weber hinzu, so sind wir sicher, dass zu jedem Index β eine Primzahl p gefunden werden kann, welche sich in dem Gitter G_β zerlegt. Die gefundene Darstellung von $p\alpha+\beta$ lässt sich hiernach für alle möglichen Werthe von β realisiren.

Mithin gilt in der That der Satz:

Die Classengleichung ist eine Abel'sche Gleichung in dem durch $\sqrt{-\Delta}$ erweiterten Rationalitätsbereiche; (sie ist, wie man sagen kann, eine Relatio-Abel'sche Gleichung, im Gegensatz zu einer absolut-Abel'schen Gleichung, bei welcher die Coefficienten der rationalen Function $R''\beta$ dem natürlichen Rationalitätsbereiche angehören würden). Und ferner:

Ihre Gruppe ist mit der Gruppe der Gittercomposition direkt

isomorph.

Eine unmittelbare Folge unseres Satzes ist diese:

Die Classengleichung ist, (wie jede Abel'sche Gleichung) durch Wurzelzeichen lösbar.

Der letztgenannte Satz ist bereits von Abel selbst ausgesprochen. Wir müssen daraus schliessen, dass er auch die vorhergehenden Entwickelungen, wenn auch in anderer Form, gekannt hat, oder doch deren Möglichkeit im raschen Vorausblick eingesehen hat.

Mit den angegebenen wichtigen Resultaten ist aber die Theorie der singulären elliptischen Gebilde nicht abgeschlossen. Es ist das Verdienst von Kronecker, der als erster den Abel'schen Satz bewiesen hat, diese Theorie noch weiter geführt zu haben.

Kronecker zeigt vor allen Dingen, dass die Classengleichung eine irreducible Gleichung ist, dass

sie also einen in sich abgeschlossenen, nicht weiter zerlegbaren Rationalitätsbereich, den sog. Classen-Körper definirt.

Der Beweis dieser Thatsache setzt weitgehende Hülfsmittel voraus, nämlich die allgemeine Idealtheorie der algebraischen Zahlen, welche gleichfalls von Kronecker u. zw. gerade zu dem genannten Zwecke entwickelt worden ist.

Wir verweisen dieserhalb auf Weber S. 110.

Wir wollen an dieser Stelle von der allgemeinen Idealtheorie eine wenn auch nur flüchtige Beschreibung im Sinne dieser Vorlesung geben.

Gegeben sei die irreducible ganzzahlige Gleichung $\chi_n(x) = 0$ mit den Wurzeln $\xi, \eta, \zeta, \ldots$; Jede dieser Wurzeln definirt einen Körper, bestehend aus denjenigen ganzzahligen rationalen Functionen dieser Grössen, welche

ganze algebraische Zahlen sind. Wir verstehen jetzt unter $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ einen Complex so erhaltener zusammengehöriger ganzer Zahlen.

Zur geometrischen Interpretation kommen wir, wenn wir den Complex der Zahlen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ durch einen <u>Punkt des n-dimensionalen Raumes</u> repräsentiren. Suchen wir alle Punkte des Raumes auf, welche zu Coordinaten bez. Zahlen des Körpers ξ, des Körpers η, etc besitzen, so bilden diese ein <u>Gitter im n-dimensionalen Raume</u>. Es ergiebt sich dieses daraus, daſs die so entstehende Gesammtheit von Punkten die Eigenschaft haben muſs, sich bei Addition der Coordinaten zu reproduciren. In unserem Bilde berücksichtigen wir hiernach immer gleichzeitig n Zahlen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, während man in der Körpertheorie nur je von einer dieser Grössen redet. Wir haben zunächst zu defi-

niren, was es heissen soll, zwei Punkte dieser Gitter zu multipliciren. Unsere Definition soll durch die Formel festgelegt sein.

$$(\xi, \eta, \zeta, \ldots) \cdot (\xi', \eta', \zeta', \ldots) = (\xi\xi', \eta\eta', \zeta\zeta', \ldots).$$

Sodann haben wir von der Operation der Division zu sprechen und überhaupt von den Teilbarkeitsgesetzen. In Bezug hierauf gilt nun ganz dasselbe, was bei den ebenen Gittern ausgeführt wurde. Um das Theorem aufrecht zu halten, dass jeder Punkt sich (von Einheiten abgesehen) auf eindeutige Weise in Primpunkte zerlegen lässt, muss man neben das Hauptgitter eine endliche Anzahl von Nebengittern stellen und deren Punkte als sog. „ideale Punkte" neben den Punkten des Hauptgit-

ters, den „wirklichen Punkten" in die Betrachtung einbeziehen. Ich kann diesbezüglich auf die Furtwängler'sche Dissertation *) verweisen, wo der Fall $n = 3$ durchgeführt wird.

Auf Grund dieser allgemeinen Idealtheorie ist es nun Kronecker gelungen, die Irreducibilität der Classengleichung und damit die Existenz des Classenkörpers darzuthun. Von den Zahlen dieses Körpers kennen wir bisher die Invarianten j und die Multiplicatoren M^{12}. Weiterhin wird man namentlich nach den Einheiten des Körpers, den Primzahlen etc. fragen. Diese Dinge werden behandelt von Weber, Ellipt. Fu. § 110 und 111.

Wir müssen uns hier auf die folgende Bemerkung beschränken.

*) Furtwängler, Zur Theorie der in Linearfactoren zerlegbaren, ganzzahligen ternären cubischen Formen. Göttingen 1896.

Sei der Einfachheit wegen $p \equiv 1$ (mod 12); dann ist nicht nur $\mathfrak{M}^{12}$, sondern $\mathfrak{M}$ selbst durch $j\alpha+\beta$ und $j\alpha$ rational ausdrückbar, d. h. eine Zahl des Classenkörpers. Für $\mathfrak{M}$ hatten wir die Formel

$$\mathfrak{M} = \pi \sqrt[12]{\frac{\Delta\alpha+\beta}{\Delta\alpha}};$$

die in derselben Weise mit dem Index $-\beta$ gebildete Zahl ist

$$\mathfrak{M} = \pi \sqrt[12]{\frac{\Delta\alpha-\beta}{\Delta\alpha}}$$

Solcher Zahlen $\mathfrak{M}$. erhalten wir eine ganze Reihe, dadurch dass wir den Index $\underline{\alpha}$ alle möglichen Werthe durchlaufen lassen.

Wir wollen die beiden vorstehenden Zahlen mit einander multipliciren, nachdem wir in der zweiten α durch $\alpha+\beta$ ersetzt haben. Dann ergiebt sich

$$\bar{\pi}\sqrt[12]{\frac{\Delta\alpha+\beta}{\Delta\alpha}} \quad \pi\sqrt[12]{\frac{\Delta\alpha}{\Delta\alpha+\beta}} = \bar{\pi}\pi = p.$$

Um den Sinn dieser Gleichung gehörig zu würdigen, müssen wir uns auf den Standpunkt derjenigen Arithmetiker stellen, welche nur die Zahlen des Hauptgitters als „wirkliche" Zahlen gelten lassen. Dann werden wir sagen können: Die Primzahl p, welche sich im quadratischen Körper nur in die idealen Factoren π und $\bar{\pi}$ spalten lässt, wird hier, im Classenkörper, in die wirklichen Factoren

$$\bar{\pi}\sqrt[12]{\frac{\Delta\alpha+\beta}{\Delta\alpha}} \quad \text{bez.} \quad \pi\sqrt[12]{\frac{\Delta\alpha}{\Delta\alpha+\beta}}$$

zerlegt. Der Classenkörper leistet also hinsichtlich der Spaltung der Primzahl p dasselbe, wie die Hinzunahme der Nebengitter zu dem Hauptgitter der Ebene.

Man kann sich die Frage vorlegen, welche von diesen beiden

Methoden zur „Realisirung der idealen Zahlen" vor der anderen den Vorzug verdient. Ohne Zweifel ist die Hinzunahme der Nebengitter viel elementarer als der Uebergang zu dem Classenkörper. Dafür bietet aber der letztere in algebraischer Hinsicht gewisse Vortheile dar. Er ist nämlich relativ zu dem quadratischen Körper wie wir sehen, direct ein Abel'scher Körper. Etwas anders stellt sich das algebraische Verhältniß der Nebengitter zu dem Hauptgitter. Die Nebengitter haben wir so construirt, daß wir aus gewissen Zahlen des Hauptgitters die k^{te}, k_1^{te}, k_2^{te} ... Wurzel zogen. Die Nebenzahlen sind also mit den Hauptzahlen durch die Gleichung verknüpft

$$X^k = H\,,$$

wo H eine ganze Zahl des Körpers $\sqrt{-\nabla}$ bedeutet. Diese Glei-

chung ist nicht direkt eine Abel'sche Gleichung. Die Wurzeln derselben $x_1, x_2, \dots x_k$ sind allerdings rational durch einander auszudrücken, aber nur nach Adjunction der k^{ten} Einheitswurzeln. Wir können hiernach sagen: *Die sämmtlichen Ecken unserer Normalfigur gehören gleichfalls einem Körper an, welcher relativ Abel'sch ist. Bei der Aufstellung dieses Körpers wird aber nicht nur $\sqrt{-\nabla}$, sondern auch $e^{\frac{2\pi i}{k}}, e^{\frac{2\pi i}{k_1}}, e^{\frac{2\pi i}{k_2}}, \dots$ oder, wie wir zusammenfassend sagen können, $\sqrt{-\nabla}$ und $e^{\frac{2\pi i}{k}}$ unter die rational bekannten Grössen gerechnet.* Geometrisch kommt das Hereinspielen der h^{ten} Einheitswurzeln darin zum Ausdruck, dass wir unsere Normalfigur auf h Weisen zeichnen konnten. *Die Normalfigur ist h-deutig bestimmt. Umgekehrt ist der Classenkörper eindeutig definirt.*

Wir bemerken noch, daß die Primzahl p nach unserer obigen Formel

$$p = \pi \sqrt[n]{\frac{\Delta\alpha+\beta}{\Delta\alpha}} \cdot \pi \sqrt[n]{\frac{\Delta\alpha}{\Delta\alpha+\beta}}$$

scheinbar sehr verschiedene Zerlegungen in unserem Classenkörper gestattet, da wir den Index α hier beliebig variiren können. Diese Behauptung scheint dem Gesetze der eindeutigen Factorenzerlegung zu widersprechen. Sie findet aber dadurch ihre Erklärung, daß sich die einzelnen Factoren nur durch Einheiten unterscheiden. Es gilt nämlich der Satz:

Alle Ausdrücke

$$\sqrt[12]{\frac{\Delta\alpha+\beta}{\Delta\alpha} \; \frac{\Delta\alpha'}{\Delta\alpha'+\beta}}$$

sind Einheiten des Classenkörpers. Unter ihnen sind als reell diejenigen ausgezeichnet, für welche $\alpha = -\beta$

und $\alpha' = 0$ ist; die reellen Einheiten sind also durch den Ausdruck gegeben

$$\sqrt[12]{\frac{\Delta_0^{\,2}}{\Delta_\alpha \Delta_{-\alpha}}}$$

Leider ist es unmöglich, dass wir hier diese interessanten Fragen weiter verfolgen. Man gebraucht zu ihrer Behandlung zweckmässigerweise die Kronecker'sche Gränzformel, die wir gerade mit Rücksicht hierauf früher mitgetheilt hatten.

Den Rest der Vorlesung werden wir uns damit beschäftigen, analoge Untersuchungen für die Moduln höherer Stufe aufzustellen. Ansätze hierzu liegen bereits in der Litteratur vor. So behandelt Weber den Modul 3ter Stufe $\sqrt[3]{J}$ und den Modul 48ter Stufe $f = \sqrt[24]{k^2 k'^2}$, welche bez. der 1ten oder 2ten Stufe adjungirt sind.

Unsere Aufgabe soll es insbesondere sein, den Modul 5ter Stufe ζ

zu besprechen. Wir werden die Betrachtung allerdings nicht vollkommen durchführen können, sondern müssen uns begnügen, einen genauen Plan für dieselbe zu entwerfen. Die erforderlichen Schritte wollen wir der Reihe nach aufzählen.

1. Vor allem werden wir uns zunächst damit beschäftigen, die Transformation n^{ter} Ordnung von $\varphi(\omega)$ zu studiren. Dabei setzen wir, um Complicationen zu vermeiden, ein für allemal voraus, dass n nicht durch 5 theilbar sei.

Ähnlich wie zwischen der Invariante J und dem transformirten J' eine algebraische Gleichung $F(J', J) = 0$ vom Grade $\psi(n)$ besteht, so bestehen auch zwischen φ und dem transformirten Werthe φ' Transformationsgleichungen vom Grade $\psi(n)$ (vergl. pag. 81). Der Unterschied ist nur der, dass wir hier immer 60 solcher Transformationsgleichungen neben einander zu betrachten haben. Diese 60 Gl. un-

terscheiden wir in eine Hauptgleichung und 59 Nebengleichungen: Wir vervollständigen die früheren Angaben hierüber folgendermassen.

a. Die Hauptgleichung $f(\varphi', \varphi) = 0$ liefert alle diejenigen transformirten $\varphi' = \varphi\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right)$, $ad - bc = n$, für welche die Transformationscoefficienten a, b, c, d den Congruenzbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} a \equiv \pm 1 & b \equiv 0 \\ c \equiv 0 & d \equiv \pm n \end{array}\right\} \pmod{5}$$

genügen. Die Coefficienten der Hauptgleichung sind rationale Zahlen des natürlichen Rationalitätsbereichs.

b. Die Nebengleichungen entstehen aus der Hauptgleichung dadurch, daß wir auf ζ oder auf ζ' beliebige Ikosaedersubstitutionen ausüben. Zunächst scheint es so, als ob auf diese Weise im Ganzen 60×60 Gleichungen entständen. Dies ist aber nicht der Fall, weil immer 60 von den sämmtlichen Gleichungen untereinander

identisch werden. Wir erwähnten in dieser Hinsicht bereits pag 87, dass die Gleichung $f(\xi',\xi)=0$ in sich übergeht, wenn wir auf φ' eine beliebige Ikosaedersubstitution und auf φ eine in dem Sinne zugeordnete Substitution ausüben, dass wir ε in ε^n verwandeln. So kommt es, dass von den 60×60 Gleichungen immer 60 identisch werden. Die übrig bleibenden 60 Gleichungen können wir in der Form anschreiben:

$$f(S(\xi'),\xi)=0,$$

unter S eine beliebige Ikosaedersubstitution verstanden. Bedeutet S die Identität, so haben wir die Hauptgleichung, bedeutet S eine beliebige andere Ikosaedersubstitution, so ergiebt sich je eine ~~der~~ Nebengleichungen.

c. Es ist klar, dass die Coefficienten der (nach ξ und ξ' geordneten) Nebengleichungen im Allgemeinen nicht dem natürlichen Rationalitätsbe-

reich angehören können. Da nämlich durch die Substitution S die 5te Einheitswurzel ε eingeführt wird, so werden die Coefficienten im allgemeinen dem durch ε erweiterten Rationalitätsbereich angehören. Es ist aber auch möglich, daß von den Nebengleichungen einige im natürlichen, einige in dem Rationalitätsbereiche $\varepsilon+\varepsilon^4$ (welcher mit dem Rationalitätsbereiche $\sqrt{5}$ identisch ist) rational sind. Die Entscheidung hierüber muß der Specialuntersuchung vorbehalten bleiben.

2. Wir wollen die Nebengleichungen noch in ähnlicher Weise durch Bedingungen für die Transformationscoefficienten a, b, c, d charakterisiren, wie dieses für die Hauptgleichung bereits oben geschehen ist. Zu dem Zwecke wollen wir die sämmtlichen Transformationen:

$$\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}, \quad ad - bc = n$$

in gewisser Weise in Classen zusammenfassen. Wir verstehen unter a_0, b_0, c_0, d_0 eine Lösung der Congruenz:

$$a_0 d_0 - b_0 c_0 \equiv n \pmod 5.$$

Diese Congruenz besitzt 60 verschiedene mod 5 incongruente Lösungen (sofern wir von einem gleichzeitigen Vorzeichenwechsel der 4 Grössen a_0, b_0, c_0, d_0 absehen). Wir fassen nun alle diejenigen Transformationen (a, b, c, d) zusammen, welche demselben Werthsystem (a_0, b_0, c_0, d_0) mod 5 congruent sind, so dass

$$\left.\begin{matrix} a \equiv \pm a_0 & b \equiv \pm b_0 \\ c \equiv \pm c_0 & d \equiv \pm d_0 \end{matrix}\right\} \pmod 5.$$

Es zeigt sich, dass alle in diesem Sinne zusammengehörigen Transformationen aus ξ alle diejenigen Werthe ξ' entstehen lassen, welche mit ξ durch eine unserer 60 Transformationsgleichungen zusammenhängen. Die letzteren werden wir daher passend durch Beifügung

des Schemas $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}$ unterscheiden und allgemein in der Form schreiben:

$$f\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}(\varphi', \varphi) = 0$$

Die Hauptgleichung wird in dieser Bezeichnung durch das Schema $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}$ characterisirt.

Uebrigens betonen wir nochmals, dass wir immer nur „eigentliche" Transformationen im Auge haben, also ausschliessen, dass die a, b, c, d einen Factor gemein haben.

3. Es gilt nun vor allen Dingen, die Gesammtheit dieser 60 Transformationsgleichungen dadurch übersichtlicher zu machen, dass wir sie in Kategorieen gleichberechtigter Gleichungen zusammenfassen. Wir erwähnten bereits, dass wir zwei Transformationsgleichungen gleichberechtigt nennen, wenn sie auseinander hervorgehen, indem man auf ζ' und ζ dieselbe Ikosaedersubstitution (cogrediente Ikosaedersubstitutionen)

ausübt. Die folgenden Entwickelungen werden zeigen, daß 2 gleichberechtigte Gleichungen auch immer gleichwertig sind, so daß es genügt, aus jeder Kategorie immer nur eine Gleichung zu betrachten. Man wird allgemein zu reden diejenige wählen, welche die einfachsten Zahlencoefficienten darbietet.

4. Jede unserer 60 Transformationsgleichungen geht wie wir sagten, bei 60 simultanen Substitutionen von ξ und ξ' in sich über. Die Substitutionen sind aber im allgemeinen durchaus nicht „congruent" oder „cogredient", d. h. für ξ und ξ' gleichlautend. Indessen kann ein Theil der 60 Substitutionen cogredient sein. Wir wollen die Anzahl dieser cogredienten Substitutionen mit Gierster als das „Gewicht" der Gleichung bezeichnen. Jeder Transformationsgleichung kommt auf diese Weise eine gewisse Gewichtszahl g zu.

Diese Gewichtszahl g steht in

engster Beziehung zu der eben postulirten Eintheilung unserer Gleichungen in Kategorieen gleichberechtigter Gleichungen. Ersichtlich ist nämlich die Anzahl der Gleichungen, welche mit einer gegebenen Gleichung gleichberechtigt sind, $\frac{60}{g}$.

5. Zur Bestimmung des Gewichtes dient die folgende Congruenz:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \equiv \pm \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} \pmod{5}$$

mit $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

In dieser Congruenz sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Unbekannten. Die Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ geben direct diejenigen Ikosaedersubstitutionen von ξ, welche mit den zugehörigen Ikosaedersubstitutionen identisch sind. Die Anzahl der mod 5 unterschiedenen unimodularen Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, welche der obigen Congruenz genügen, liefert direct die Gewichtszahl g.

6. Die Spezialdiscussion dieser

Congruenzen ergiebt für g die folgenden Tabellen:

$n \equiv 1 \pmod 5$

Bezeichnung der Schemata	Anzahl der Schemata	Gewicht g
$\pm \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	1	60
Andere Schemata mit		
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	24	5
$a_0 + d_0 \equiv 0$	15	4
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	20	3

$n \equiv 4 \pmod 5$

Schemata	Anzahl	g
$\pm \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$	1	60
Andere Schemata mit		
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	24	5
$a_0 + d_0 \equiv 0$	15	4
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	20	3

$n \equiv 2 \pmod{5}$

Schemata	Anzahl	g
$a_0 + d_0 \equiv 0$	10	6
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	20	3
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	30	2

$n \equiv 3 \pmod{5}$

Schemata	Anzahl	g
$a_0 + d_0 \equiv 0$	10	6
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	20	3
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	30	2

Hier bedeutet immer die erste Colonne eine modulo 5 zu verstehende Congruenzbedingung für die Zahlen des Schemas, die zweite Colonne giebt an, für wie viele Schemata die

betr. Bedingung erfüllt ist; die letzte Colonne zeigt das zugehörige Gewicht an.

Wie man sieht, liefern die Transformationsgrade $n \equiv 1, 4 \pmod{5}$ und die Grade $n \equiv 2, 3 \pmod{5}$ je unter sich analoge Resultate.

7. Aus den vorstehenden Tabellen können wir noch folgendes schliessen:

Bei $n \equiv 2, 3 \pmod{5}$ sind jedesmal diejenigen Schemata gleichberechtigt, welche dieselbe Summe $\pm(a_0 + d_0)$ darbieten.

Denn greifen wir z. B. bei $n \equiv 2$ ein beliebiges Schema mit $(a_0 + d_0) \equiv \pm 1$ heraus. Dasselbe hat das Gewicht 3, infolgedessen giebt es noch $\frac{60}{3} = 20$ gleichberechtigte Schemata; diese müssen natürlich sämmtlich dasselbe Gewicht wie das ursprüngliche Schema, also das Gewicht 3, haben. Infolgedessen müssen es die 20 Schemata sein, für die $(a_0 + d_0) \equiv \pm 1$ ist, denn diese allein

besitzen das Gewicht 3.

Das Gleiche wie bei $n \equiv 2, 3$ gilt auch bei $n \equiv 1$ (mod. 5) für $(a_0 + d_0) \equiv 0, \pm 1$, ebenso bei $n \equiv 4$ für $(a_0 + d_0) \equiv 0, \pm 2$.

Dagegen zerfallen bei $n \equiv 1$ die Schemata mit $(a_0 + d_0) \equiv \pm 2$ und bei $n \equiv 4$ die Schemata mit $(a_0 + d_0) \equiv \pm 1$ in drei getrennte Kategorien gleich-berechtigter. Es giebt jedesmal ein für sich stehendes Schema vom Gewicht 60. Aber auch die übrig bleibenden 24 Schemata vom Gewicht 5 können noch nicht in eine Kategorie gehören, denn zum Gewicht 5 gehören jedesmal nur 12 gleichberechtigte Schemata. Es müssen deshalb die genannten 24 Schemata sich noch in 2 Kategorien von je 12 gleichberechtigten Schematen zerlegen. Diese 2 Kategorien werden später noch näher characterisirt werden.

8. Bevor wir dazu übergehen, die einzelne Gleichung $f\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}(\xi, \zeta)$ in ganz analoger Weise

zu behandeln wie die Gleichung $f(J, J)$, müssen wir vorher noch eine Betrachtung einschieben, welche für die Constitution der eben genannten Gleichung von Wichtigkeit ist.

Die Zahl g bezeichnet nach ihrer Entstehung je eine Untergruppe der Ikosaedergruppe, nämlich die Gruppe derjenigen Ikosaedersubstitutionen, welche auf ζ und ζ' angewandt je eine Transformationsgleichung von ζ in sich überführen. Durch eine solche Untergruppe werden die Punkte der ζ-Kugel allgemein zu reden zu g zusammengeordnet. Diese g Punkte werden im allgemeinen verschieden von einander sein; sie können nur dann ganz oder zum Theil zusammenfallen, wenn es sich um die Ecken des Ikosaeders, oder die Mitten seiner Seitenflächen, oder seine Kantenhalbirungspunkte handelt, da nur diese

als Fixpunkte der Ikosaedersubstitutionen auftreten.

9. Jetzt können wir in mannigfacher Weise eine rationale Function g^{ten} Grades r_g von φ bilden, welche bei den Substitutionen unserer Untergruppe ungeändert bleibt. Dies r_g kann immer so ausgesucht werden – und dies werden wir im Folgenden voraussetzen – dass es in seinen Coefficienten keine andere Irrationalität enthält als ε.

So können wir z. B. für die cyclische Untergruppe G_5, die durch die Substitution

$$\varphi' = \varepsilon\varphi$$

begründet wird, als einfachstes r_5 wählen:

$$r_5 = c\varphi^5,$$

wo c eine beliebige Constante bedeutet. Wollen wir an der angegebenen Beschränkung festhalten, so dürfen wir c nicht ganz beliebig wählen, sondern müssen es als rationale Function von ε ansetzen.

Über die zu den Untergruppen gleichberechtigter Gleichungen gehörigen r_q wollen wir noch eine besondere Verabredung treffen. Bekanntlich gehen in einer Categorie gleichberechtigter Gleichungen aus einer von ihnen die übrigen hervor, indem man auf die erstere gewisse Ikosaedersubstitutionen anwendet. Dementsprechend werden wir bei einer Categorie gleichberechtigter Gleichungen für eine das r_q beliebig – allgemein zu reden möglichst einfach – wählen. Für die übrigen Gleichungen bestimmen wir dann die r_q so, daß wir auf das gewählte r_q diejenigen Ikosaedersubstitutionen anwenden, durch welche die betreffenden Gleichungen aus der zuerst gewählten hervorgehen.

Die Gleichung r_q = Const. liefert uns nun, je nach dem Werthe der rechter Hand stehenden Constanten, die Gruppen

von jedesmal g zusammengehörigen Punkten der Kugel; sie hat also nur dann möglicher Weise vielfache Wurzeln, wenn es sich um die vorhin bezeichneten besonderen Punkte handelt.

Alle anderen rationalen Functionen von ξ, welche bei unserer Untergruppe ungeändert bleiben, — insbesondere die rationale Function 60ten Grades J - sind rationale Functionen von r_g.

Ist $g = 60$, so nehmen wir einfach $r_{60} = J$.

10. Wir setzen jetzt in einer unserer Gleichungen $\xi' = \xi$ und fragen nach den Wurzeln der so entstehenden Gleichung: $f\left|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right|(\varphi\cdot\varphi)$

Ein Theil dieser Wurzeln kann in die Ikosaederecken fallen; es sind dieses solche Werthe von ξ, denen der Werth $J = \infty$, d. h. ein reelles ω entspricht. Die Multiplicität dieser Wurzeln muss

durch Reihenentwickelungen von φ nach der Grösse $r = e^{2i\pi\omega}$ entschieden werden. Da uns diese Wurzeln später stören würden, wollen wir die entsprechenden Linearfactoren aus der Gleichung $f(\varphi, \psi) = 0$ fortgehoben denken, was (innerhalb des Bereiches $\mathcal{E}$) rational möglich ist.

Ebenso können eine Anzahl Wurzeln in die Seitenmitten oder Kantenmitten des Ikosaeders fallen, denen solche Werthe ω entsprechen, die mit i oder ρ aequivalent sind. Diese können wir ebenfalls (innerhalb des Bereiches $\mathcal{E}$) rational abtrennen, was wir als geschehen annehmen.

Die übrigbleibende Gleichung bezeichnen wir als „gereinigte" Transformationsgleichung und schliessen sie zwecks äusserer Kennzeichnung in eckige Klammern ein:

$$\left[f \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} (\varphi, \psi) \right] = 0.$$

Von ihren Wurzeln gehören jedesmal g vermöge der zugehörigen Untergruppe zusammen, und diese g Wurzeln sind unter sich alle verschieden. Hieraus schliessen wir, daß unsere Gleichung in Wirklichkeit eine solche für r_g ist, die wir so schreiben:

$$\Psi_{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}}(r_g) = 0.$$

Die Coefficienten von Ψ sind jedenfalls nach Adjunction von ε rational, und im übrigen zerfallen natürlich die Gleichungen Ψ genau so in Kategorieen gleichberechtigter wie die Gleichungen f.

Bei den Gleichungen Ψ erkennen wir nun sehr deutlich, daß gleichberechtigte Gleichungen auch wirklich gleichwertig sind. Nach der Verabredung die wir über die r_g getroffen haben, unterscheiden sich nämlich die gleichberechtig-

ten Ψ nur durch ihr ν_g, fallen im übrigen aber vollständig zusammen.

11. Die Wurzeln der Gleichung $\Psi = 0$ lassen sich nun in übersichtlicher Weise durch die zugehörigen Werthe von ω bezeichnen.

Zunächst gehören natürlich zu jedem Werthe φ unendlich viele Punkte ω, aber von diesen unendlich vielen brauchen wir nur die reducirten ω, d.h. die innerhalb des aus 60 Elementarbereichen der ω-Ebene zur Hauptcongruenzgruppe 5ter Stufe gehörigen Ikosaederpolygons liegenden zu berücksichtigen.

Da wir ferner die besonderen Werthe φ, welche den Ikosaederecken etc. entsprechen, bereits entfernt haben, werden wir nur solche Punkte ω zu betrachten haben, welche im Inneren der Halbebene liegen und weder mit $\varrho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ noch mit $i = \sqrt{-1}$

im elementaren Sinne aequivalent sind.

Für die Beziehung zwischen ζ und ω gilt nun der Satz:

Ein Werth ζ wird ebenso oft Wurzel der Gleichung $[f(\varphi,\psi)] = 0$ sein, als das entsprechende reducirte ω bei Transformationen n^{ter} Ordnung des vorgelegten Schemas ungeändert bleibt.

und ferner:

Jedesmal q Werthe ζ (oder auch ω) zusammen ergeben eine Wurzel r_q von $\Psi = 0$.

12. Sei jetzt in Uebereinstimmung hiermit:

$$\omega = \frac{a\omega + b}{c\omega + d},$$

$$\text{wo } (ad - bc) = n \text{ und } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \equiv \pm \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} \pmod 5$$

Wir haben dann

$$c\omega^2 + (d-a)\omega - b = 0$$

oder, wie wir abkürzend schreiben:

$$P\omega^2 + Q\omega + R = 0.$$

Hier sind die ganzen Zahlen P, Q, R (die gern einen Factor gemein haben können, den wir denn aber zweckmässigerweise nicht wegheben) an die Congruenzen gebunden:

$$P \equiv \pm c_0, \quad Q \equiv \pm (d_0 - a_0), \quad R \equiv \mp b_0 \pmod{5}.$$

Wir setzen noch der Kürze halber

$$a + d = t,$$

worauf natürlich t der Congruenz unterliegt:

$$t \equiv \pm (d_0 + a_0) \pmod{5}.$$

Als Werth der negativ genommenen Discriminante der für ω geltenden quadratischen Gleichung ergiebt sich jetzt:

$$4PR - Q^2 = \nabla = 4n - t^2.$$

Auf solche Weise finden wir: Um alle in Betracht kommenden Werthe von ω zu erhalten, suche man zunächst alle positiven Werthe von ∇, die in der Gestalt $4n - t^2$ enthalten sind, wo $t \equiv \pm (d_0 + a_0) \pmod{5}$. Ferner bestimme man innerhalb

des Ikosaederbereiches der ω-Ebene die Nullstellen aller solcher primitiver oder imprimitiver Gleichungen $P\omega^2 + Q\omega + R = 0$, deren Discriminante $= -\nabla$ ist und die ausserdem den für die P, Q, R aufgestellten Congruenzbedingungen genügen. Von diesen Nullstellen schliesse man noch diejenigen aus, deren P, Q, R mit t einen gemeinsamen Theiler haben, – denn sie würden auf uneigentliche Transformationen n^{ter} Ordnung führen. – Ferner schliesse man diejenigen aus, die mit ρ oder i im elementaren Sinne aequivalent sind. Die übrigen ω geben jeweils mit der richtigen Multiplicität die einzelnen Wurzeln der Gleichung $[f] = 0$, und, da sie zu g zusammengehören, der Gleichung $\Psi(r_g) = 0$.

13. Es kommt nun darauf an, für jeden Werth von ∇ die Zahl der hiermit bezeichneten ω-Werthe

abzuzählen. Es möge $\mathcal{H}$ die Classenzahl der zu $(-\nabla)$ gehörigen primitiven und imprimitiven Classen quadratischer Formen sein. Von ihnen kommen wegen der eben formulirten Nebenbedingungen gewisse in Wegfall; die Zahl der übrig bleibenden Klassen bezeichnen wir mit $\mathcal{H}'$. Dieses $\mathcal{H}'$ baut sich in einfacher Weise aus den Anzahlen h der primitiven Classen auf, die zu solchen Discriminanten gehören, die aus $(-\nabla)$ durch Abtrennung gewisser quadratischer Theiler entstehen. Wir schreiben in diesem Sinne

$$\mathcal{H}' = \sum h\left(\frac{-\nabla}{\tau^2}\right),$$

wobei τ theilerfremd zu t zu wählen ist. Ist nämlich (p, q, r) eine Form aus den h Klassen der Discriminante $\left(\frac{-\nabla}{\tau^2}\right)$, so ist die entsprechende Form der Discriminante $(-\nabla)$ offenbar $(\tau p, \tau q, \tau r)$. Diese Form gehört aber zu den gesuchten, da $\tau p, \tau q, \tau r, t$ keinen ge-

meinsamen Theiler haben.

Zu jeder der $\mathcal{H}'$ Classen gehören nun innerhalb des Ikosaederbereichs der ω-Ebene 60 Nullpunkte. Unter ihnen müssen wir diejenigen insbesondere aussuchen, welche den für P', Q', R' aufgestellten Congruenzbedingungen genügen. Wir wissen bereits, dass sich die auszuwählenden Punkte in Serien von je q zusammengruppiren.

Eine kurze Ueberlegung zeigt nun, dass sich bei $n \equiv 2, 3$ (mod. 5) innerhalb der zur einzelnen Classe gehörigen 60 Nullpunkte immer gerade eine Serie von q Punkten befindet, welche die Congruenzbedingungen befriedigt.

Um die Ideen zu fixiren, zeigen wir dies gleich an einem bestimmten Beispiel. Wir nehmen an $n \equiv 2$ (mod. 5) und ein Schema $\left|\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right|$, für das $a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ ist. Solcher giebt es 20 mit dem zugehörigen Gewicht 3. Es sei nun eine bestimmte Discri-

minante $\nabla = 4n - t_0^2$ vorgelegt, wo $t_0 = a_0 + d_0 = \pm 1$ ist. Wir greifen nun eine zu $(-\nabla)$ gehörige Classe heraus und von den zugehörigen 60 reducirten ω ein ganz beliebiges ω_0, dem die Form

$$(\mathfrak{P}_0', Q_0, \mathfrak{R}_0')$$

entsprechen möge. Aus $t_0, \mathfrak{P}_0', Q_0; \mathfrak{R}_0'$ lässt sich nun offenbar ein entsprechendes Schema $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}$ berechnen; das natürlich einer zu der ausgewählten Categorie gehörigen Gleichung zugehört, da eben $a_0 + d_0 = \pm 1$ ist. ω_0 liefert daher für eine bestimmte unter den 20 gleichberechtigten Gleichungen eine Wurzel, nämlich für die, welche durch das berechnete Schema charakterisirt ist. Für dieselbe Gleichung liefern natürlich noch 2 andere von den 60 Werthen ω, etwa ω_1 und ω_2 Wurzeln. Wenden wir nun auf $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ diejenigen Substitutionen an, welche den Ikosaedersubstitutionen entsprechen, vermittelst deren man aus unserer

letztgenannten Gleichung die 19 gleichberechtigten erhält, so sehen wir, dass für jede dieser 20 Gleichungen sicher 3 von unseren Werthen ω Wurzeln liefern.

Da nun im ganzen 20 gleichberechtigte Gleichungen vorhanden sind, so sind damit auch alle 60 Werthe ω erschöpft, d.h. von den 60 Nullpunkten gehören zu jeder von den $\frac{60}{g}$ gleichberechtigten Gleichungen stets eine und auch nur eine Serie von g Punkten.

Das giebt also für unsere Gleichung

$$g \sum \mathcal{H}'(4n - t^2)$$

Nullpunkte (wobei t natürlich nur Werthe $\equiv \pm(a_0 + d_0) \pmod{5}$ zu durchlaufen hat.

Dieselbe Formel gilt bei $n \equiv 1 \pmod{5}$ für $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 1$, und bei $n \equiv 4 \pmod{5}$ für $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 2$. Dagegen ist für $n \equiv 1$ und $a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ und ebenso für $n \equiv 4$ und $a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ eine Fallunterscheidung

einzuführen.

14. In den zuletzt angegebenen Fällen giebt es im ganzen je 25 zugehörige Gleichungen, die in 3 Categorieen gleichberechtigter zerfallen.

Wir bezeichnen dies kurz so:

$n \equiv 1 \pmod{5}$

	Schemata	Anzahl	g
I	$\pm \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	1	60
II	$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	12	5
III	$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	12	5

$n \equiv 4 \pmod{5}$

	Schemata	Anzahl	g
I	$\pm \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$	1	60
II	$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	12	5
III	$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	12	5

Hier ist die Kategorie I schon von den übrigen getrennt, da sie nur ein ganz bestimmtes Schema enthällt. Die Kategorieen II und III können wir dagegen vorläufig noch nicht sondern.

Ehe wir nähere Erläuterungen hierzu geben, bemerken wir noch vorweg, daſs in den betrachteten Fällen die

Discriminante $\nabla = 4n - t^2$ stets durch 5 theilbar ist, wie man leicht nachrechnet.

Sei nun ein beliebiges hergehöriges ∇ gegeben und greifen wir eine beliebige zu $(-\nabla)$ gehörige Klasse heraus, welche die Eigenschaft hat, daß P, Q, R, t keinen gemeinsamen Theiler haben. Dieser entsprechen dann 60 Nullpunkte ω. Hier ist sofort klar, daß die 60 Werthe ω nur Wurzeln für eine der 3 Kategorien gleichberechtigter Gleichungen liefern können, weil eben für jede Kategorie jedesmal 60 Nullpunkte aufgebraucht werden.

Nach der Lehre von den Gattungen, auf die wir hier nicht näher eingehen können, zerfallen nun, da ∇ durch 5 theilbar ist, die Klassen in 3 Kategorieen:

I. solche, die nur Vielfache von 5 darstellen,

II. solche, die ausser Vielfachen von 5 nur quadr. Reste mod. 5 darstellen,

III. solche, die ausser Vielfachen von 5 nur quadr. Nichtreste mod 5 darstellen.

Diese Eintheilung entspricht nun genau der Eintheilung unserer Schemata in die 3 Kategorieen gleichberechtigter.

Haben wir nämlich für $n \equiv 1$ das Schema $\pm\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}$ oder für $n \equiv 4$ das Schema $\pm\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}$, so erweisen sich vermöge unserer Congruenzen P, Q, R durch 5 theilbar. Es gehört hierher also die erste Kategorie von Klassen, die nur Vielfache von 5 darstellt.

Die Kategorieen II und III trennen sich, wie wir nun nachweisen wollen, dadurch, daß für die eine, sagen wir für die Kategorie II, nur solche quadratische Formen Wurzeln liefern, die ausser Vielfachen von 5 nur quadratische Reste mod 5 darstellen, so daß für diese Kategorie entweder das Symbol $\left(\frac{C_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{K_0}{5}\right)$ oder beide gleich $+1$ sind. Für die Gleichungen der Kategorie

III liefern entsprechend nur solche quadr. Formen Wurzeln, die ausser Vielfachen von 5 nur quadratische Nichtreste mod 5 darstellen; für Kategorie II ist daher entweder das Symbol $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beide gleich -1.

Möge nämlich durch die Gleichung

$$P\omega^2 + Q\omega + R = 0,$$

wo entweder das Symbol $\left(\frac{P}{5}\right)$ oder $\left(\frac{Q}{5}\right)$ oder beide gleich $+1$ sind, ein Werth ω definirt werden, der zu einer Wurzel einer Gleichung der I. Kategorie Veranlassung giebt. Es giebt dann noch 59 andere Werthe ω, die zu derselben Klasse gehören, und die zugehörigen quadratischen Formen haben nach der Theorie der Gattungen alle die Eigenschaft, daß entweder das $\left(\frac{P}{5}\right)$ oder $\left(\frac{Q}{5}\right)$ oder beide gleich $+1$ sind. Die 60 Werthe ω vertheilen sich nun aber doch zu je 5 auf die 12 gleichberechtigten Gleichungen; infolgedessen

muſs gemäſs unseren früheren Congruenzen für die sämmtlichen gleichberechtigten Schemata der II. Kategorie entweder das Symbol $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beide gleich + 1 sein.

Ganz analoges gilt für die III. Kategorie. Wir können daher unsere Tabelle von pag. 342 so vervollständigen:

$n \equiv 1 \pmod{5}$

Schemata	Anzahl	g
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ und $\left(\frac{c_0}{5}\right) = 0$	1	60
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beide $= +1$	12	5
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beide $= -1$	12	5

$n \equiv 4 \pmod{5}$

$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ und $\left(\frac{c_0}{5}\right) = 0$	1	60
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beide $= +1$	12	5
$\left(\frac{b_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beide $= -1$	12	5

Wir haben jetzt noch kurz die Zahl der Nullpunkte in den 3 Fällen anzugeben. Wir theilen zu diesem Zwecke die zu $(-\nabla)$ gehörigen $\mathcal{H}'$ Klassen in die obigen 3 Kategorieen und bezeichnen deren Anzahlen mit $\mathcal{H}_0'$, $\mathcal{H}_{+1}'$, $\mathcal{H}_{-1}'$, so daß also

$\mathcal{H}_0'$ die Anzahl der Klassen ist, welche nur Vielfache von 5 darstellen,

$\mathcal{H}_{+1}'$, die Anzahl der Klassen ist, welche ausser Vielfachen von 5 nur Q R mod 5 darstellen,

$\mathcal{H}_{-1}'$, die Anzahl der Klassen ist, welche ausser Vielfachen von 5 nur Q N R mod 5 darstellen.

Beachtet man noch, daß

$\mathcal{H}_0'(\nabla) = \mathcal{H}'\left(\frac{\nabla}{25}\right)$ ist, so ist die Zahl der Wurzeln in den 3 Fällen offenbar

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } 60\sum \mathcal{H}'\left(\frac{4n-t^2}{25}\right) \\ \text{II. } 9\sum \mathcal{H}_{+1}'(4n-t^2) \\ \text{III. } 9\sum \mathcal{H}_{-1}'(4n-t^2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} t \equiv \pm 2, \text{ wenn } n \equiv 1 \\ t \equiv \pm 1, \quad " \quad n \equiv 4 \end{array} \text{ mod } 5 \text{ ist.}$$

15. Diese Anzahlen sind alle bereits

seiner Zeit von Gierster bestimmt worden, der von ihnen aus zu den Classenzahlrelationen 5ter Stufe gelangt ist, wie man des Näheren in Modulf. Bd. II, Absch. IV, 6 nachlesen kann, wo auch die gesammte Litteratur des Gegenstandes zusammengestellt ist. Wir können hier aus Mangel an Zeit auf dieselben nicht näher eingehen.

Die obigen Formeln geben zugleich die Zahl der Wurzeln von $[f(\varphi, \varphi)] = 0$ und durch g dividirt, die Zahl der Wurzeln von $\Psi(r_g) = 0$. Aber sie geben nicht nur die Zahl dieser Wurzeln, sondern auch deren Bedeutung im einzelnen, sie lassen die Structur der Gleichung $[f(\varphi, \varphi)] = 0$ bez. $\Psi(r_g) = 0$ erkennen.

Nachdem wir so einen Ueberblick über die Wurzeln der gereinigten Transformationsgleichungen gewonnen und gelernt haben, dieselben mit Hülfe der reducirten Formen (P, Q, R) sämmtlich zu berechnen, machen wir nun den Schritt von den Transforma-

tionsgleichungen zu den Classenglei-
chungen.

Wir bezeichnen als die zu einem Schema $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}$ gehörige Classengleichung fünfter Stufe der Discriminante $(-\nabla)$ diejenige Gleichung vom Grade h, welcher die zu den betreffenden primitiven Classen gehörigen Werthe des r_g genügen. Wir schreiben diese Gleichung:

$$X_\nabla (r_g) = 0$$

wobei zu beachten ist, daß eigentlich noch ein Schema hinzugesetzt werden müßte.

In den besonderen Fällen, wo nicht sämmtliche existirenden Classen in Betracht kommen, construiren wir die entsprechenden Theilclassenglei-chungen, die wir dann analog wie H' mit einem Zusatzindex $+1$ oder -1 versehen

$$X_\nabla^{+1}(r_g) = 0 \quad X_\nabla^{-1}(r_g) = 0.$$

Endlich setzen wir aus diesen X ebenso grössere Aggregate X' zusammen,

wie sich die $\mathcal{H}'$ aus den h aufbauen:

$$\chi'_{\nabla}(r_g) = \prod \chi'_{\frac{\nabla}{\tau^2}}(r_g).$$

Eventuell sind beiderseits die Zusatzindices zuzufügen. Wir erhalten dann, den Formeln von № 13 und 14 entsprechend folgende Décomposition des jedesmaligen $\Psi(r_g)$:

1. bei $n \equiv 2, 3 \pmod{5}$, sowie bei $n \equiv 1$ für die Schemata $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 1$ und bei $n \equiv 4$ für die Schemata $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 2$:

$$\Psi(r_g) = \prod \chi'_{4n-t^2}(r_g); \quad t = \pm(a_0 + d_0);$$

2. bei $n \equiv 1, 4$ im Falle jeweils des ausgezeichneten Schemas:

$$\Psi(r_g) = \prod \chi'_{\frac{4n-t^2}{25}}(r_g); \quad t \equiv \pm 2 \text{ resp. } \equiv \pm 1;$$

(Hier ist r_g einfach gleich g);

3. bei $n \equiv 1, 4$ für die anderen Schemata $a_0 + d_0 \equiv \pm 2$, resp. ± 1:

$$\left.\begin{array}{l}\Psi(r_q) = \Pi X'_{+1,4n-t^2}(r_q) \\ \Psi(r_q) = \Pi X'_{-1,4n-t^2}(r_q)\end{array}\right\} t = \pm 2 \text{ resp. } \pm 1.$$

16. Es hat nun keine Schwierigkeit, unsere Ψ in rationaler Weise in die einzelnen X' und fernerhin in die einzelnen χ zu spalten. Man beachte zu diesem Zwecke, daſs die singulären j den Classengleichungen erster Stufe genügen und daſs sich j jedesmal rational durch die in Betracht kommenden r_q darstellt.

Setzt man in $X_\nabla(j) = 0$ für j ein $R'_{\frac{60}{\nu}}(r_q)$, so erhält man das Produkt von Classengleichungen 5ter Stufe, die zu einer Kategorie gleichberechtigter Schemata gehören. In unseren obigen Formeln haben wir aber ganz andere Zusammenstellungen der Classengleichungen 5ter Stufe; aus beiden wird man daher die einzelne Classengleichung 5ter Stufe rational isoliren können.

Wir erfahren so, dass unsere Gleichungen:

$X_{\nabla}(r_g) = 0$ resp. $X_{\nabla}^{+1}(r_g) = 0$, $X_{\nabla}^{-1}(r_g) = 0$

rationale Zahlencoefficienten haben. „Rational" ist dabei natürlich (sofern die Specialuntersuchung der einzelnen Fälle es nicht als überflüssig erscheinen lässt) dahin zu verstehen, dass ε als adjungirt gilt.

Die Auflösung der Classengleichung erster Stufe zieht natürlich die Auflösung unserer Classengleichungen 6ter Stufe unmittelbar nach sich. Wir können daher auch so sagen:

Man betrachte die Darstellung von J als rationale Function $\left(\frac{60}{g}\right)$ter Grades von r_g als eine algebraische Gleichung für r_g. Diese Gleichungen, welche sich kurzweg als Resolventen der Ikosaedergleichung bezeichnen lassen, haben bei gegebenen singulären Werthe von J nach Adjunktion von diesem singulären Werthe J

und von $\mathcal{E}$ zum Rationalitätsbereich eine rationale Wurzel.

Wir führen kurz den Grund an, der darin liegt, dass die Gleichungen

$$X^{c}_{\nu}(j) = 0 \text{ und } j = \mathcal{R}^{c}_{\frac{60}{g}}(r_g)$$

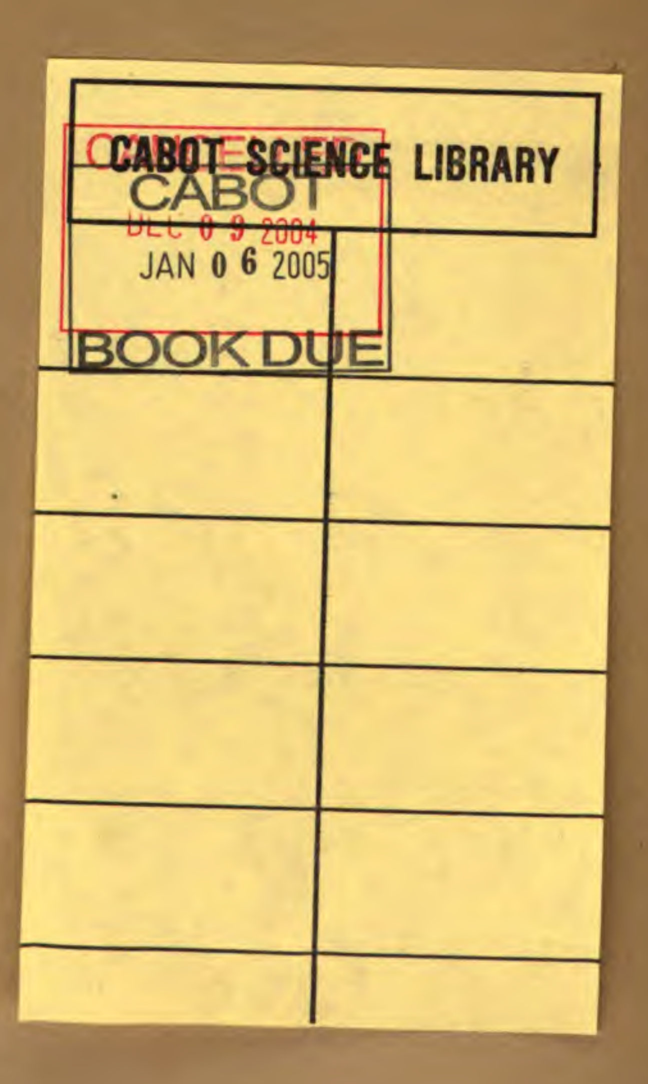
bei singulären j eine gemeinsame Wurzel haben. Auf nähere Erörterungen, ob diese Gleichungen eventuell mehr Wurzeln gemeinsam haben u. s. w., können wir uns nicht mehr einlassen.

Zum Schluss möchte ich noch folgende Bemerkung anfügen:

Schon seit 20 Jahren, nämlich seit der Zeit, als Gierster die Ausdehnung der Classenzahlrelationen auf die höheren Stufen gelang, hege ich den lebhaften Wunsch, dass jemand allgemeiner die Theorie der singulären Moduln, insbesondere für die 5te Stufe durchführen möchte. Da in den Bemerkungen der letzten Stunden ein vollständiger Plan für diese

Untersuchung vorliegt, kann sie keine grossen Schwierigkeiten mehr machen.

Ich schliesse diese Vorlesung mit der wiederholten Bitte an meine Zuhörer, dieses schöne und erfolgreiche Arbeitsthema zur Erledigung bringen zu wollen.



CABOT SCIENCE LIBRARY
CANCELLED
CABOT
DEC 09 2004
JAN 06 2005
BOOK DUE